

Problème du trimestre n°52

Énoncé proposé par François DROUIN

Le numéro spécial « NOMBRES » de LA RECHERCHE (n°278, juillet-août 1995) indique une méthode utilisée par les paysans du Nordeste brésilien :

« Pour trouver l'aire d'une parcelle ayant la forme d'un quadrilatère, ils multiplient la demi-somme des longueurs de deux côtés opposés par la demi-somme des longueurs des deux autres côtés opposés. »

Existe-t-il des quadrilatères autres que le rectangle pour lesquels cette méthode est exacte ?

Envoyez vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à
Bernard PARZYSZ, 3 rue Marie Sautet, 57000 METZ.

Solution du problème n°51

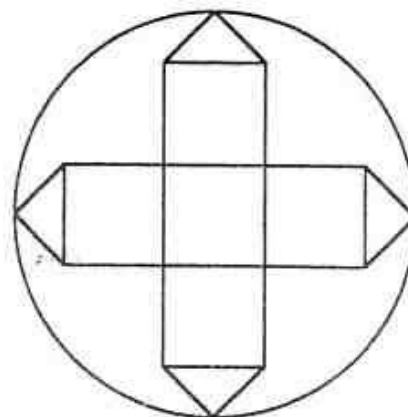
Rappel de l'énoncé : On dispose d'un disque de 21 cm de diamètre, découpé dans une feuille de papier format A4.

Quelle est la dimension maximale d'un cube dont le patron (en un seul morceau) peut être réalisé dans ce disque ?

N.B. On ne tiendra pas compte des « languettes » d'assemblage.

Combien y a-t-il de patrons possibles (à une isométrie près) ?

Je n'ai reçu que deux réponses pour ce problème, l'une de François DROUIN (55 Chauvonnecourt), et l'autre de Pol LE GALL (57 CourcellesChaussey).



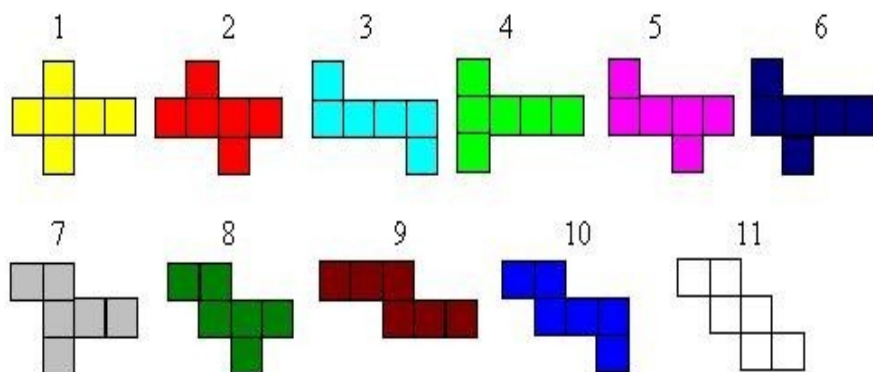
P. Le Gall m'a transmis le dessin ci-contre, qui met le doigt sur une imprécision de l'énoncé (si je puis m'exprimer ainsi, car les dessins en général - et celui-ci en particulier - sont dépourvus d'appendices digitaux).

Lorsque j'ai posé le problème, j'avais en tête les patrons "classiques" du cube, dans lesquels les faces sont conservées entières, sans découpage. Mais le texte du problème ne le précisait pas, et 'notre collègue, s'engouffrant dans la brèche, est arrivé à placer, dans un disque de diamètre d , un cube de côté $d/4$.

Pour ma défense, je m'appuierai sur une citation d'un article paru dans le dernier Bulletin Vert (le gros) : « *[Les jeux mathématiques] doivent être, par définition, un plaisir de l'esprit. Pour cela, chacun doit comporter, ou bien une astuce dans la solution qui le rende très facile alors qu'il a l'air très difficile, ou bien une certaine beauté dans l'énoncé qui le rende "appétissant". Un certain manque de précision dans le texte doit par contre être d'avance acceptée* » (c'est moi qui souligne).

F. Drouin, lui, m'a envoyé les dessins des divers développements "classiques" du cube, chacun étant inscrit dans le disque qui lui paraît avoir le plus petit diamètre. Il arrive ainsi, au mieux, à inclure un développement d'un cube de côté a dans un disque de diamètre $a\sqrt{17}$, soit $a = d/\sqrt{17}$ (seuls les résultats sont donnés). C'est un peu moins bien que P. Le Gall, mais il semble bien que ce soit le meilleur résultat qu'on puisse obtenir sans avoir à recoller une face. Voyons ce qu'il en est exactement, en explicitant la démarche.

Rappel : Étant donné un cube, on démontre qu'il en existe en tout et pour tout 20 développements différents conservant les faces, à une isométrie directe près. 18 d'entre eux constituent des paires de symétriques (par rapport à un axe), les deux derniers étant eux-mêmes leur propre symétrique. Ce qui nous donne finalement, à une isométrie (directe ou indirecte) près, 11 développements : ceux qui sont représentés ci-dessous :



Lorsque j'ai eu l'idée de ce "problème du trimestre", je l'avais conçu comme une amusette : pour chacun des différents développements d'un cube, chercher, de façon intuitive, le plus petit disque le contenant. Puis - après avoir reçu la réponse de F. Drouin - je me suis demandé si, finalement, la détermination de ce disque était aussi "naturelle" qu'elle en avait l'air, et comment, lorsqu'on avait trouvé "une" solution correspondant à un développement donné, on pouvait être sûr qu'il s'agissait bien de

"la" solution. J'ai finalement abouti à la petite étude qui suit.

Notre problème est en fait un cas particulier du problème suivant :

Soit dans le plan affine euclidien une surface S compacte (c'est-à-dire fermée et bornée), connexe et non réduite à un point (on sait qu'alors on peut l'inclure dans un disque fermé de rayon fini). On cherche le (ou les) disque(s) fermé(s) de rayon minimum contenant S .

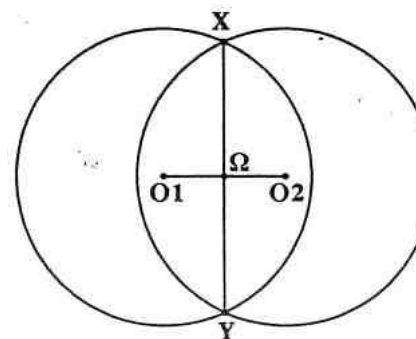


fig. 1

est également incluse dans le disque de centre Ω et de rayon $\Omega X < O_1 X = r$, ce qui est absurde.

Proposition 1 : Un tel disque existe et est unique.

Existence : elle résulte du fait que l'ensemble des rayons des disques contenant S est un fermé de $\mathbf{R}$, de la forme $[r; +\infty[$.

Unicité : soient donc deux disques distincts D_1 et D_2 de même rayon minimum r , contenant S et respectivement centrés en O_1 et O_2 . Les frontières de ces deux disques sont sécantes en X et Y , et S est incluse dans l'intersection de D_1 et de D_2 . Soit Ω le milieu commun de $[O_1, O_2]$ et de $[XY]$. S

Proposition 2 : Soit D le disque défini ci-dessus. Il existe au moins deux points distincts, communs aux frontières de S et de D .

a) Si tous les points de S étaient intérieurs à D , l'ensemble des distances des points de S au centre O de D serait un compact de $\mathbf{R}$, strictement majoré par le rayon r de D , ce qui est absurde. De plus, un point d'intersection de S avec la frontière C de D appartient nécessairement à la frontière F de S car, s'il était intérieur à S , il serait le centre d'une boule ouverte contenue dans S , et certains points de cette boule n'appartiendraient pas à D (fig. 2).

Il existe donc au moins un point A de F appartenant également à C . Montrons qu'il en existe un deuxième.

b) Définissons, pour tout point M de S distinct de A , le réel positif k_M de la façon

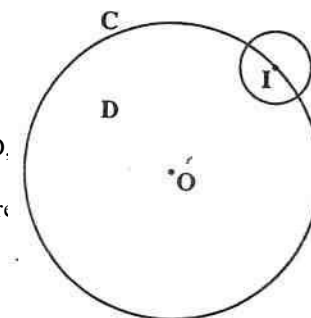


fig. 2

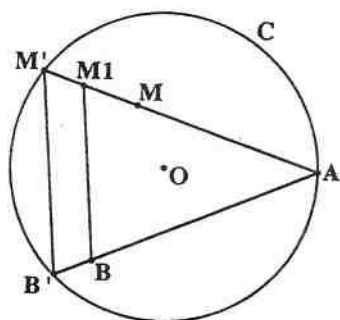


fig. 3

suivante :

Soit M' le point où la demi-droite $[AM)$ recoupe C (fig. 3, ci-après), c'est-à-dire l'autre extrémité de la corde de support (AM) ; on pose $k_M = AM/AM'$.

L'ensemble des k_M est évidemment majoré par 1. Montrons qu'il contient 1.

En effet, s'il avait pour plus grand élément $k < 1$, on pourrait trouver un point B de S tel que $k_B = k$ (B' étant l'extrémité de la corde correspondante).

Dans ce cas, l'homothétie h de centre A et de rapport k est telle que $h(B') = B$. Posons $D' = h(D)$.

De plus, pour tout point M de S distinct de A, on a

$$0 < \frac{AM}{AM'} = k_M \leq k$$

, donc $h(M')$ est un point M_1 tel

que $M \in]AM_1[$. Par conséquent $h^{-1}(M)$ appartient à $]AM'$: le point $h^{-1}(M)$ est donc intérieur à D , et il s'ensuit que M est intérieur à $h(D)$, de rayon $kr < r$, ce qui est absurde.

Il existe donc un point B de S, distinct de A, tel que $k_B = AB/AB' = 1$, c'est-à-dire que B appartient à C.

Remarque : si S est un polygone, les deux points précédents en sont des sommets.

En effet, si l'un des points communs aux frontières du disque D et du polygone S était un point intérieur à l'un des côtés, $[MN]$, du polygone :

- ou bien [MN] serait tangent à C, et alors les sommets M et N seraient extérieurs au disque (contradiction) ;

- ou bien [MN] serait sécant à C, et alors l'un des deux sommets M ou N serait intérieur au disque, et l'autre extérieur (contradiction).

Proposition 3: Si S a un centre de symétrie, il s'agit du centre O de D .

Soit Ω le centre de symétrie de S (ce centre est unique, puisque S est bornée), supposé distinct de O , et soit s la symétrie par rapport à Ω .

On a $S = s(S) \subset s(D)$. S est donc incluse dans l'intersection de D et de $s(D)$, ces disques étant de rayon minimum r et de centres distincts O et $s(O)$. Ceci est en contradiction avec la proposition 1.

Conséquence : si un point de S appartient à la frontière C de D , il en est de même de son symétrique.

Proposition 4 : Si S a un axe de symétrie, cet axe contient le centre 0 de D.

Soit Δ un axe de symétrie de S , et supposons que $O \notin \Delta$. Soit σ la symétrie par rapport à Δ . La démonstration est la même que la précédente, en remplaçant s par σ .

Même conséquence que ci-dessus.

Proposition 5: Si S est un triangle, la frontière C de D est :

- dans le cas où les trois angles du triangle sont aigus : le cercle circonscrit

- sinon : le cercle ayant pour diamètre le plus grand des trois côtés.

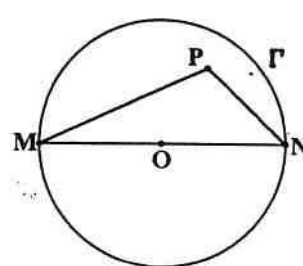


fig. 4

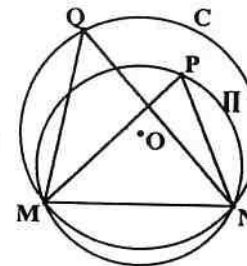


fig. 5

Soit MNP le triangle, $[MN]$ son plus grand côté et G le cercle de diamètre $[MN]$.

On a nécessairement $d \geq MN$.

a) si l'angle MNP est obtus, on a exactement $d = MN$, car le sommet P est intérieur à G (fig. 4); donc D est le disque de frontière G en raison de l'unicité.

b) si l'angle MNP est droit, on a le même résultat.

c) si l'angle MNP est aigu, le triangle MNP a ses trois angles aigus. D'après la proposition 2, deux de ses sommets (par exemple M et N) sont sur C. Le troisième sommet (P) est donc, soit sur C, soit intérieur à C. Montrons que le second cas est impossible.

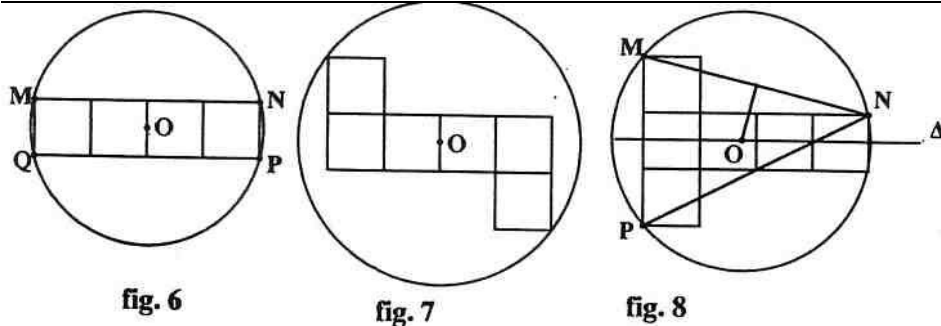
Soient Q un point quelconque de C situé dans le même demi-plan de frontière [MN] que P, et Π le cercle circonscrit au triangle MNP, de diamètre δ (fig. 5).

Dans le triangle MNP, on a $MN/\sin(MPN) = \delta$. De même, dans le triangle MQN, on a $MN/\sin(MQN) = d$.

Si P est intérieur à C, on a $\text{MQN} < \text{MPN} < 90^\circ$ d'où $\sin(\text{MQN}) < \sin(\text{MPN}) < 1$, et $\delta > d$, ce qui contredit le fait que, par définition de C, on a $d \leq \delta$.

Par conséquent, le point P appartient à C , d'où $C = \Pi$.

Appliquons maintenant ces résultats à notre problème :

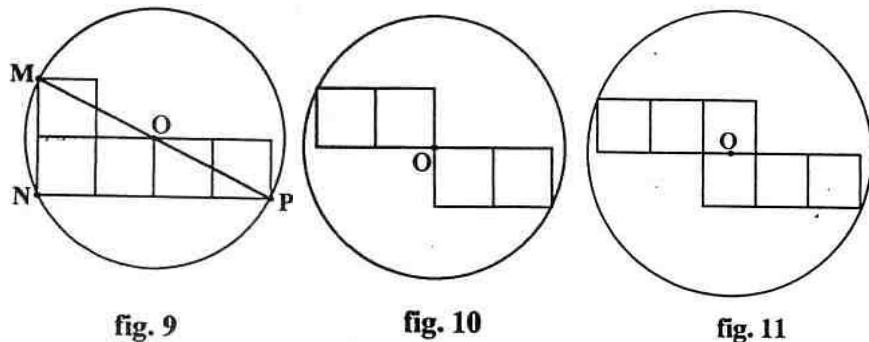


1°) Soit la surface rectangulaire MNPQ constituée de 4 carrés alignés ; la frontière du disque D (fig. 6) est le cercle circonscrit au triangle rectangle MNP (proposition 5). Si maintenant on ajoute deux carrés pour obtenir le développement n° 1, on vérifie aisément que ces carrés sont intérieurs à D, qui est le disque cherché. Même chose pour le développement n° 2. Dans ce cas, on a donc $a = d/\sqrt{17}$... Malheureusement, ceci ne s'applique pas aux développements n°s 3, 4, 5 et 6.

2°) Pour le développement n° 3, on remarque qu'il possède un centre de symétrie O, ce qui permet de déterminer le disque D (proposition 3) en considérant les points de S les plus éloignés de O (fig. 7). On a ici $a = d/5$.

3°) De même, le développement n° 4 possède un axe de symétrie D, donc le centre O de D se trouve sur D (proposition 4). Considérons le triangle acutangle MNP (fig. 8) : il est inscriptible dans un cercle C dont le centre O est l'intersection de la médiatrice de [MN] avec D. On vérifie alors que le développement entier est inclus dans le disque de bord C. D'où, derechef, $a = d/5$.

4°) Pour les développements n°s 5 et 6, partons de l'ensemble de 5 carrés représenté sur la fig. 9. Le triangle rectangle MNP est inscriptible dans le cercle de diamètre [MP] (proposition 5), et on vérifie que le 6ème carré que l'on ajoute pour achever



le développement est bien intérieur à ce cercle. On en déduit $a = d/2\sqrt{5}$.

5°) Considérons à présent une surface constituée de 4 carrés disposés comme sur la fig. 10. Elle admet un centre de symétrie, et le disque D s'obtient comme au 2°. Si maintenant nous ajoutons deux carrés pour réaliser les développements nos 7 et 8, nous pouvons vérifier sans difficulté qu'ils sont inclus dans D, et calculer que l'on a cette fois $a = 2d/\sqrt{85}$.

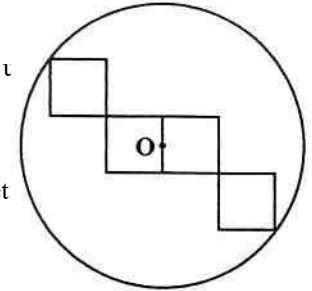


fig. 12

6°) Par contre, ceci ne vaut plus si nous ajoutons deux carrés pour constituer le développement n°9. Mais nous pouvons derechef appliquer la méthode du 5° à cette figure, qui présente elle aussi un centre de symétrie (fig. 11) On en déduit que $a = d/\sqrt{29}$.

7°) Plaçons maintenant les 4 carrés comme sur la fig. 12. La méthode du 5° s'applique également ici pour obtenir le disque D. Et, si l'on ajoute deux carrés pour obtenir les développements nos 10 ou 11, on vérifie aisément qu'ils sont bien inclus dans D (d'où $a = d/2\sqrt{5}$).

Ce qui met un terme à notre recherche.

