PREUVE, PAR DÉCOUPAGE, QUE 8x13 = 5x21 !!!

Le rédacteur en chef a reçu, début décembre 1996, un courrier d'André VIRICEL, au sujet des tentatives de preuves « par découpage », telles celles qui sont utilisées pour le théorème de PYTHAGORE.
La simple observation de la figure ne suffit pas à apporter cette preuve : elle ne peut qu'apporter une « intime conviction » ; encore faut-il que les élèves de collège puissent faire la différence...

Un exemple très connu nous est apporté par la suite de FIBONACCI, qui permet d'écrire une infinité d'erreurs du type de celle qui est en titre :

1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	.....

où il est évident (!!!), sur la figure ci-contre, que 8x13 = 5x21.
La suivante sera 8x34 = 13x21, puis 13x55 = 21x34, etc.

On constate qu'il y a toujours une unité d'écart. Mais cet écart est alternativement en plus ou en moins ; c'est à dire que, sur la figure, il y a alternativement soit une unité de «vide» dans le rectangle dessiné, soit une unité de «recouvrement».

Nous allons apporter la preuve par récurrence de ce résultat.
Considérons quatre termes consécutifs d'une suite de FIBONACCI :

a	b	a+b	a+2b

Le produit des termes extrêmes est $P_1 = a(a+2b) = a^2+2ab$
Le produit des termes moyens est $P_2 = b(a+b) = b^2+ab$
Et $P_1 - P_2 = a^2 - b^2 + ab$.

Faisons l'hypothèse de récurrence que $P_1 - P_2 = a^2 - b^2 + ab = 1$ (ce qui est vrai pour les quatre premiers termes de la suite de FIBONACCI donnée plus haut).

A l'étape suivante, nous aurons :

b	a+b	a+2b	2a+3b

et $P_1 = b(2a+3b) = 3b^2+2ab$ et $P_2 = (a+b)(a+2b) = a^2+2b^2+3ab$.
D'où $P_1 - P_2 = b^2 - a^2 - ab = \mathbf{-1}$.
A l'étape suivante, nous aurons :

a+b	a+2b	2a+3b	3a+5b

et $P_1 = (a+b)(3a+5b) = 3a^2+5b^2+8ab$ et $P_2 = (a+2b)(2a+3b) = 2a^2+6b^2+7ab$
D'où $P_1 - P_2 = a^2 - b^2 + ab = \mathbf{+1}$.

Et le résultat évoqué ci-dessus est bien démontré.