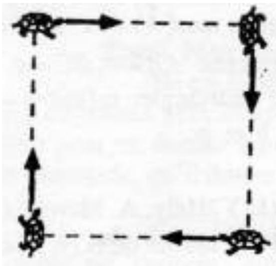
Problème du trimestre n°49
Extrait de l'ouvrage « Les poulets de Minsk »

Les tortues mathématiques de Macha

Macha a dressé ses quatre tortues de sorte qu'elle se suivent toujours l'une l'autre. Elle les place aux quatre sommets d'un carré, comme le montre la figure, chaque tortue ayant en point de mire le flanc droit de sa voisine. Les quatre tortues progressent à la même vitesse v. Au bout de combien de temps les tortues se rejoignent-elles ? Quelle est leur trajectoire ?



Solution du problème n°48
Extrait de l'ouvrage de Polya
« Comment poser et résoudre un problème»

Rappel de l'énoncé : construire un triangle connaissant la valeur α de l'angle A, la hauteur *h* issue de A et le périmètre *p*.

Ce trimestre, les collègues ont été relativement nombreux à envoyer des solutions. Il s'agit de Danielle BLUM (57, Metz), Geneviève D'ANDREA (57, Thionville), Jean-Yves HELY (35, Rennes), Pol LE GALL (57, Courcelles-Chaussy), Bruno LOVAT (57, Metz), Alain MERCIER (57, Saint-Julien-lèsMetz), Claude PAGANO (83, La Seyne sur Mer) et Jacques VERDIER (54, Tomblaine). Certains d'entre eux, on le verra ci-après, ont proposé plusieurs solutions.
Quant à Mme BLUM, elle a profité de l'occasion pour faire travailler sa classe de troisième sur ce problème, en donnant aux paramètres des valeurs numériques. Nous publions la solution "collégiale" de cette classe dans le prochain numéro du Petit Vert.

Les solutions reçues ressortissent à 5 types, comme on le verra ci-après. Nous

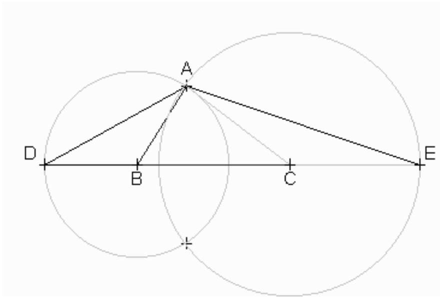
PETIT VERT N°49. MARS 1997

utiliserons les notations suivantes :
Soit le triangle ABC, de hauteur [AH].

- mesure des angles : mes(*A*) = α, mes(*B*) = β, mes(*C*) = γ, , .
- mesures de segments: AB = *c*, BC = *a*, AC = *b*, AH = *h*
- demi-périmètre du triangle : *p* (soit *a* + *b* + c = 2*p*).

Les données sont α, *h* et *p*.

1. Un rabattement (J.-Y. Hély, A. Mercier, J. Verdier)



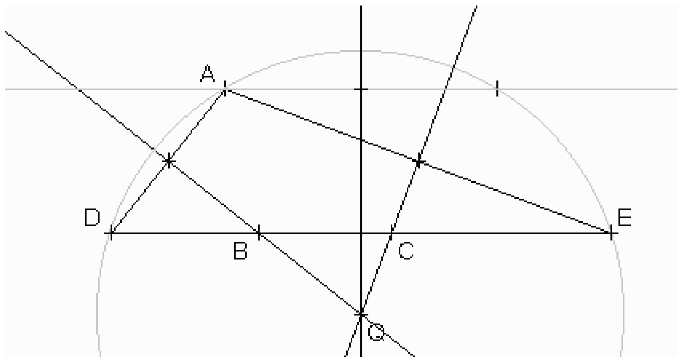
Analyse :
Rabattons le sommet A sur (BC), autour de B en D et autour de C en E.

On a alors : DE = DB + BC + CE = 2*p* et l'égalité d'angles :

$$\mathrm{DAE} = \mathrm{DAB} + \mathrm{BAC} + \mathrm{CAE} = \frac{\beta}{2} + \alpha + \frac{\gamma}{2}.$$

Compte tenu du fait que la somme des trois angles du triangle ABC vaut *π*, on a finalement $\mathrm{DAE} = \frac{\alpha+\pi}{2}$. Donc D appartient à l'arc capable d'angle $\frac{\alpha+\pi}{2}$ relativement à la corde DE.

D'où la construction :
On construit le segment [DE] de longueur 2*p*, la médiatrice Δ de ce segment et on prend le point Q sur cette médiatrice, tel que l'angle EDQ mesure $\frac{\mathrm{A}}{2}$.



On trace le cercle de centre Q passant par D et E. L'arc capable cherché est l'arc sous-tendu par le segment [DE] et situé de l'autre côté de (DE) par rapport à Q. En effet, pour tout point M de cet arc on a bien : $\mathrm{DME} = \frac{1}{2}(2\pi - \mathrm{DQE}) = \pi - \mathrm{DQS}$ soit $\mathrm{DME} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha+\pi}{2}$

.
Comme d'autre part AH = h, le point A se trouve sur une parallèle à la droite (DE) située à la distance h de celle-ci (il y a éventuellement deux solutions). Ayant A, on obtient B et C comme intersections respectives de (DE) avec les médiatrices des segments [AD] et [AE].

Discussion :
Le point A existe si et seulement si la parallèle à (DE) coupe l'arc de cercle, c'est-à-dire si h ≤ OS.

Or

$$\mathrm{OS} = \mathrm{QS} - \mathrm{QO} = \frac{\mathrm{DO}}{\cos\frac{\alpha}{2}} - \mathrm{DO}\times\tan\frac{\alpha}{2} = \mathrm{p}\left(\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} - \tan\frac{\alpha}{2}\right) = \mathrm{p}\times\frac{1-\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

D'où finalement la condition : $\boxed{\mathrm{h}.\cos\frac{\alpha}{2} \leq \mathrm{p}\left(-1\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$.

2. Cercle exinscrit (J.-Y. Hély, A. Mercier, C. Pagano, J. Verdier)
Analyse :
Soit ω le centre du cercle Γ, exinscrit au triangle ABC dans l'angle A.
On a BI = BJ, CJ = CK, donc :
AI + AK =
AB + BI + CK + CA = AB + BJ + JC + CA=
a + b + c = 2p.
Mais comme AI = AK, il vient AI = AK = p.

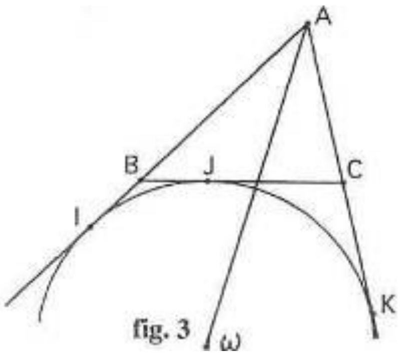
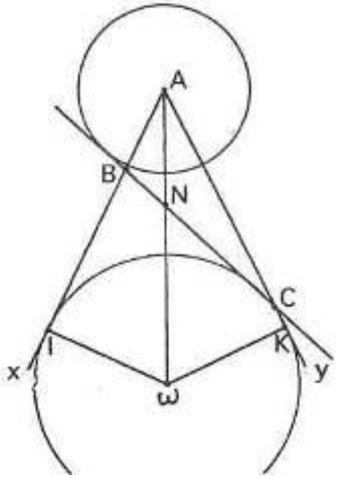


fig. 3

Construction :
On construit les demi-droites [Ax) et [Ay) telles que $\mathrm{xAy} = \alpha$, puis sur [Ax) (resp. sur [Ay)) le point I (resp. le point K) tels que AI = AK = p.
Ceci permet de construire le point ω et le cercle Γ. Il reste alors à construire (BC).
Comme on a AH = h, la droite (BC) est tangente commune intérieure à Γ et au cercle de centre A et de rayon h.
Pour la construire, il suffit de remarquer qu'elle passe par le centre d'homothétie « négatif » N des deux cercles, et l'on obtient N à partir de deux diamètres parallèles (construction classique).

Discussion :



Cette construction n'est possible que si les deux cercles sont extérieurs, c'est-à-dire si ωA ≥ h + ωI.

$$\omega\mathrm{A} = \frac{\mathrm{AI}}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\mathrm{p}}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

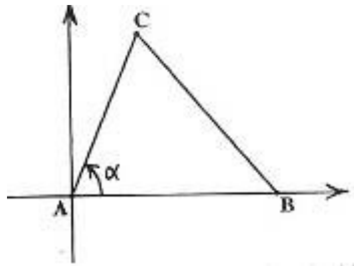
Or

$$\omega\mathrm{I} = \mathrm{AI}\times\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \mathrm{p}\times\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

et.

$$\frac{\mathrm{p}}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \geq \mathrm{h} + \mathrm{p}\times\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

D'où la condition qui n'est autre que celle trouvée au 1°.



3. Géométrie analytique (B. Lovat)
Analyse :
Considérons le repère orthonormal d'origine A, tel que B soit sur l'axe des abscisses et ait une abscisse positive, et que C soit dans le demi-plan supérieur. On a alors A*(0 ; 0),* B*(c ; 0)* et C*(b.*cos*α ; b.*sin*α).*
La droite (BC) a pour équation $b.\sin\alpha.(x-c)-(b.\cos\alpha-c).y=0$.

Elle est tangente au cercle de centre A et de rayon h.

On cherche un autre cercle auquel cette droite est tangente (enveloppe), ce qui permettra de construire (BC) comme tangente commune à ces deux cercles.

On a, dans le triangle ABC, $a^2 = b^2 + c^2 - b.c.\cos\alpha$, d'où :

$$2p = \sqrt{b^2+c^2-b.c.\cos\alpha}+b+c$$

ce qui conduit à

$$b = \frac{2p(p-c)}{2p-c(1+\cos\alpha)}.$$

En reportant cette valeur dans l'équation de (BC), on obtient :

$$2p(c-p)\left[(x-c)\sin\alpha - y.\cos\alpha\right]+cy\left[c(1+\cos\alpha)-2p\right]=0$$

Il s'agit là d'une équation du second degré en c, qui peut s'écrire :

$$\left[y(1+\cos\alpha)-2p.\sin\alpha\right]c^2+2p\left[(x+p)\sin\alpha-y(1+\cos\alpha)\right]c+2p^2(y.\cos\alpha-x.\sin\alpha)=0$$

.
La droite (BC) est tangente à un cercle si et seulement si cette équation admet une solution double, c'est-à-dire si son discriminant est nul. Soit (après division par p^2) :

$$\left[(x+p)\sin\alpha - y(1+\cos\alpha)\right]^2 - 2\left[y(1+\cos\alpha) - 2p.\sin\alpha\right]\left(y.\cos\alpha - x.\sin\alpha\right) = 0.$$

Ceci s'écrit encore :

$$(x^2+y^2)\sin^2\alpha - 2px.\sin^2\alpha - 2py.\sin\alpha(1-\cos\alpha) + p^2.\sin^2\alpha = 0.$$

Ceci s'écrit enfin : $$(x-p)^2 + \left(y - \frac{p(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}\right)^2 = \left(\frac{p(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}\right)^2.$$

En remarquant que $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan\frac{\alpha}{2}$, on obtient : $(x-p)^2 + \left(y - p.\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(p.\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2$, qui n'est autre que l'équation du cercle de centre $\omega\left(p\,;\,p.\tan\frac{\alpha}{2}\right)$ et de rayon $R = p.\tan\frac{\alpha}{2}$.

On remarque que ω appartient à la bissectrice intérieure de l'angle A (car $y = 0$ donne la solution double $x = p$) : ce cercle n'est donc autre que le cercle exinscrit au triangle ABC dans l'angle A.
On est alors ramené à la construction de la solution 2.

4. Relations métriques (I) (G. d'Andréa, A. Mercier)

<u>*Analyse*</u> :

On remarque que le problème se ramène essentiellement à la construction des points B et C (cf. solution 2) ; pour cela, on va exprimer a en fonction des données.

On a $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha = (b+c)^2 - 2bc(1+\cos\alpha)$.

Mais on a aussi $b + c = 2p - a$ et $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$, d'où $bc = \frac{ah}{\sin\alpha}$.

Reportons ces valeurs dans l'équation ci-dessus :

$$a^2 = (2p-a)^2 - 2ah\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = (2p-a)^2 - 2ah.\cot\frac{\alpha}{2}.$$

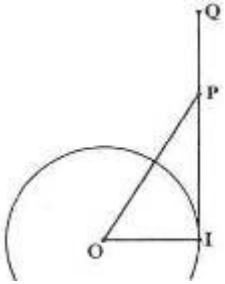
On en tire alors $a = \dfrac{p^2}{p + \frac{h}{2}\times\cot\frac{\alpha}{2}}$.

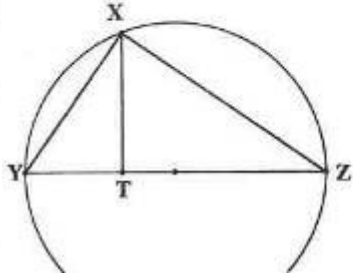
Et, en posant $l = p + \frac{h}{2}\times\cot\frac{\alpha}{2}$, il vient finalement $al = p^2$.

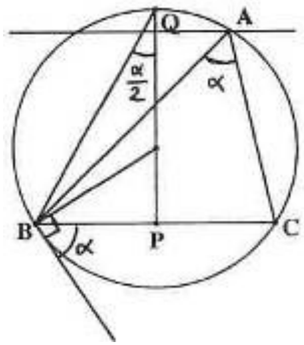
<u>*Construction*</u> :

On construit d'abord un segment de longueur l, ce qui ne représente aucune difficulté (voir figure ci-contre, à droite), dans laquelle le cercle a pour rayon $\frac{h}{2}$, l'angle $\widehat{POI}$ a pour mesure $\frac{\pi-\alpha}{2}$ et PQ = p.

Puis un segment de longueur α, comme par exemple sur la figure de gauche, où XY = p et YZ = 1.







On construit alors un segment [BC] de longueur a, puis un arc capable de α sous-tendu par [BC] et enfin la parallèle à (BC) à la distance h située du même côté de (BC) que l'arc capable.
Cette droite coupe l'arc capable en A (figure ci-contre).

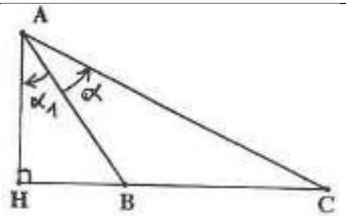
<u>*Discussion :*</u>

Le point A existe si et seulement si on a $h \le PQ = \frac{a}{2}\cot\frac{\alpha}{2}$; ce qui, en exprimant a en fonction des données, conduit à $h^2 + 2ph.\tan\frac{\alpha}{2} - p^2 \le 0$.

L'équation du second degré en h correspondante admet une solution négative $h\_$ et

$$h_+ = \frac{p\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

une solution positive.



L'inéquation ci-dessus équivaut donc à $h \le h_+$, condition identique à celle trouvée au 1°.

5. Relations métriques (II) (P. Le Gall)

Analyse : Orientons le plan de façon que la mesure principale de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ soit positive, c'est-à-dire qu'on peut poser $\text{mes}\,(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \alpha$.

Soit H le pied de la hauteur issue de A. Posons $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}) = \alpha_1$. D'après les données, on pourra aisément construire le triangle dès qu'on connaîtra α_1 (voir ci-après).
Déterminons donc α_1 en fonction des données.
Sur (BC) orientée de B verc C on a, en posant $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$:

$\overline{BH} = h.\tan\alpha_1$, $\overline{HC} = h.\tan\alpha_2$, d'où $a = h(\tan\alpha_1 + \tan\alpha_2)$, $c = \dfrac{h}{\cos\alpha_1}$ et $b = \dfrac{h}{\cos\alpha_2}$ *(voir dernière figure de ce paragraphe)*.

D'où

$$2p = a+b+c = h\left(\tan\alpha_1 + \tan\alpha_2 + \frac{1}{\cos\alpha_1} + \frac{1}{\cos\alpha_2}\right).$$

En remarquant que $\tan\theta + \dfrac{1}{\cos\theta} = \cot\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}\right)$, on obtient

$$2p = h\left[\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha_1}{2}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha_2}{2}\right)\right]$$

, la relation peut encore s'écrire :

$$2p.\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha_1}{2}\right).\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha_2}{2}\right) = h.\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right) = h.\cos\frac{\alpha}{2}.$$

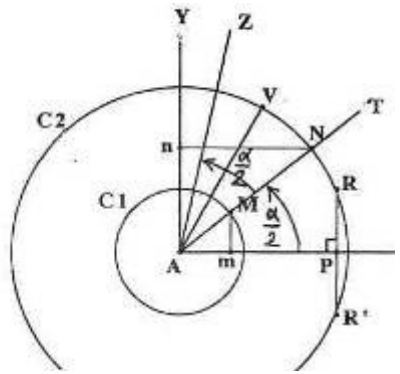
On a, en outre :

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha_1}{2}\right).\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right]$$

.

D'où, étant donné que $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\alpha_1 - \alpha$:

$$\boxed{p.\cos\left(\alpha_1 - \frac{\alpha}{2}\right) = p.\sin\frac{\alpha}{2} + h.\cos\frac{\alpha}{2}}$$



Cette relation permet la construction.
Construction :
Soit un cercle trigonométrique de centre A, repéré par $(\overrightarrow{AX},\overrightarrow{AY})$ et l'angle $(\overrightarrow{AX},\overrightarrow{AZ})$ de mesure α.
On trace les cercles (C_1) et (C_2) de centre A et de rayons respectifs h et p (*voir figure*).

Le demi-droite [AT), telle que l'angle $(\overrightarrow{AX},\overrightarrow{AT})$ ait pour mesure , coupe (C_1) et (C_2) respectivement en deix poins M et N.
Le point M se projette en m sur [AX), et le point N se projette en n sur [AY).
Spoit P le point de la demi-droite [mX) tel que AP = Am + An.

On a, par construction, $AP = p.\sin\dfrac{\alpha}{2} + h.\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

La perpendiculaire élevée de P sur (AX) coupe (C_2) en deux points R et R', et on a :

$$\cos(\overrightarrow{AX},\overrightarrow{AR}) = \cos(\overrightarrow{AX},\overrightarrow{AR'}) = \cos\left(\alpha_1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

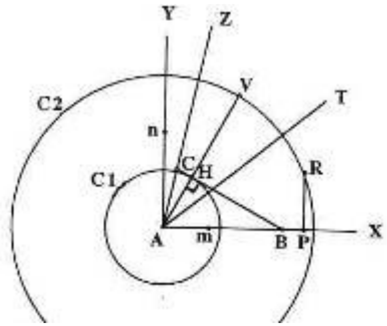
D'où

$$\alpha_1 - \frac{\alpha}{2} = mes(\overrightarrow{AX},\overrightarrow{AR}) = mes(\overrightarrow{AX},\overrightarrow{AR'})$$

Finalement,

$$\alpha_1 = mes\left((\overrightarrow{AX},\overrightarrow{AT}) + (\overrightarrow{AX},\overrightarrow{AR})\right) = mes\left((\overrightarrow{AX},\overrightarrow{AT}) + (\overrightarrow{AX},\overrightarrow{AR'})\right)$$

Ceci permet de construire la demi-droite [AV) telle que $(\overrightarrow{AX},\overrightarrow{AV})$ ait pour mesure α_1.



Il suffit (*voir figure*) de porter sur la demi-droite [AV) le point H tel que AH = h, et de tracer la perpendiculaire en H à (AH), qui coupe respectivement en B et C les demi-droites [AX) et [AZ).
Discussion :
Le point R existe si et seulement si P est