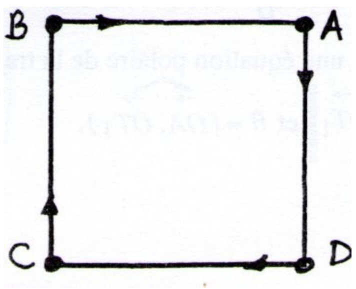
Solution du problème n°49
Extrait de l'ouvrage « Les poulets de Minsk »

Les tortues mathématiques de Macha

Macha a dressé ses quatre tortues de sorte qu'elle se suivent toujours l'une l'autre. Elle les place aux quatre sommets d'un carré, comme le montre la figure, chaque tortue ayant en point de mire le flanc droit de sa voisine. Les quatre tortues progressent à la même vitesse v. Au bout de combien de temps les tortues se rejoignent-elles ? Quelle est leur trajectoire ?



Recension des solutions par Bernard PARZYSZ

Solution du problème n° 49 :

Trois réponses sont parvenues dans les délais. Leurs auteurs sont Michel BARTHEL (stagiaire IUFM, 57 Forbach), Christophe BRIGHI (57 Thionville) et Alain MERCIER (57 Metz).
Ces solutions étant voisines (ce qui est, bien sûr, dû au type de problème), nous en avons fait une synthèse que nous vous livrons.

Soit *ABCD* le carré déterminé par les positions initiales des tortues (à l'instant 0, la tortue T_1 est en *A*, la tortue T_2 en *B*, etc.). On oriente le plan de façon que *ABCD* soit direct, et on le rapporte au repère $(O\,;\,OA,\,OB)$, *O* étant le centre du carré.

Les hypothèses de l'énoncé, avec la convention $T_5 = T_1$, se traduisent par :

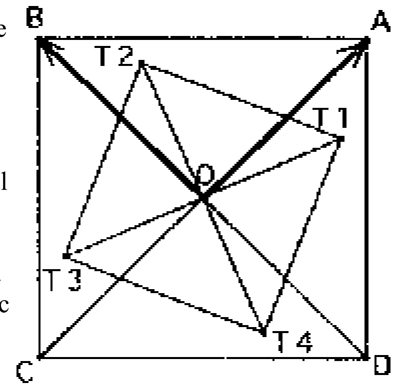
(1) à tout instant $T_1T_2T_3T_4$ est un carré de centre *O*, de sens direct.

(2) à tout instant (T_kT_{k+1}) est tangente à la trajectoire de T_{k+1}.

(3) à tout instant, $\left\|\dfrac{d\,OT_k}{dt}\right\| = V$ (la norme de la dérivée du vecteur OT_k par rapport au temps *t* est *V*, vitesse constante).

Remarquons que, d'après (1), une rencontre éventuelle ne peut avoir lieu qu'au centre du carré. D'autre part, les conditions (1) et (2) impliquent que $(OT_{k+1}, T_{k+1}T_k) = -\dfrac{3\,\pi}{4}$ (*voir figure ci-contre*).

D'où il résulte que la trajectoire de T_{k+1} (donc de chacune des tortues) est une courbe telle qu'en tout point l'angle de la tangente avec le rayon-vecteur est constant : ils s'agit donc d'un arc d'une spirale équiangle, plus connue sous le nom de spirale hyperbolique. Nous allons préciser cette courbe en déterminant l trajectoire de T_1.



Cherchons une équation polaire de la trajectoire de T_1 sour la forme $r = f(\theta)$, avec $r = \|OT_1\|$ et $\theta = (OA, OT_1)$.

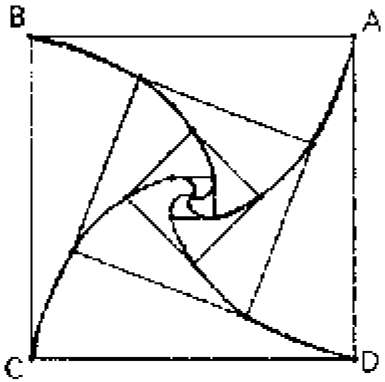
Soit u le vecteur unitaire du rayon-vecteur OT_1. On a $OT_1 = r.u$ et $\theta = (OA,u)$. En dérivant par rapport à t, il vient $\frac{d\,OT_1}{dt} = \frac{dr}{dt}.u + r.\frac{du}{dt}$.

Mais $\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}v$ (v étant tel que la base (u,v) soit ortho normale directe) ; d'où :

$$\frac{dOT_1}{dt} = r'(t).u + r\,\theta(t).v$$.

Nous avons vu plus haut que $\left(OT_1, \frac{d\,OT_1}{dt}\right) = -\frac{3\pi}{4}$ donc, d'après (3),

$$\frac{d\,OT_1}{dt} = V\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right).u + \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right).v\right] = -\frac{V}{\sqrt{2}}(u+v)$$.



En identifiant avec l'expression obtenue au-dessus et en posant $K = -\frac{V}{\sqrt{2}}$, on a :

$$\begin{cases} r'(t) = K \\ \theta(t) = \dfrac{K}{r} \end{cases}$$

Il vient alors $r(t) = Kt + r(0) = Kt + 1$ (puisqu'au départ T_1 est en A). Et, en reportant dans l'autre relation :

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{K.du}{Ku+1} + \theta(0) = \int_0^t \frac{K.du}{Ku+1} = \ln(Kt+1)$$.

Éliminons t entre r et θ ; il vient $\boldsymbol{r = e^{\theta}}$. On trouve donc bien l'équation d'une spirale logarithmique (*voir figure ci-dessus)*.

Remarques

1°) r s'annule pour $t = -\frac{1}{k}$, soit $t = \frac{\sqrt{2}}{V}$: les tortues se rencontreront au bout d'un temps fini au centre O du carré $ABCD$.

2°) A. Mercier calcule la longueur de la trajectoire. Ce calcul donne :

$$s = \int_{-\infty}^{0} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}.d\theta = \int_{-\infty}^{0} \sqrt{2e^{2\theta}}.d\theta = \sqrt{2}\left[e^{\theta}\right]_{-\infty}^{0} = \sqrt{2}$$

La longueur de la trajectoire de chaque tortue est donc égale à celle du côté du carré initial. Notre collègue remarque finement « *les tortues auraient été inspirées en se donnant rendez-vous au centre du carré en suivant leurs diagonales respectives* ». En effet, en se déplaçant à la même vitesse constante de norme V, elles auraient mis un temps de $\frac{1}{V}$ au lieu de $\frac{\sqrt{2}}{V}$.

« *Mais*, conclut-il, *les tortues mathématiques aiment les trajets … tortueux, et ne rechignent pas à l'effort* ».

3°) Voici, pour terminer, quelques mots à propos de la spirale logarithmique.
Elle a été découverte par Descartes, mais c'est Jacques Bernoulli (1654-1705) - oui, celui des probabilités et de l'équadiff - qui l'a étudiée, démontrant en particulier qu'elle est égale à sa développée. Il en dit d'ailleurs : "cette spirale merveilleuse me plaît si étonnamment par ses propriétés singulières et admirables que je puis à peine me rassasier de sa contemplation". En extase devant sa trouvaille, il alla jusqu'à demander qu'on grave cette courbe sur sa tombe (que l'on peut voir à l'intérieur de la cathédrale de Bâle), avec l'inscription "*eadem mutata resurgo*" (changée en moi-même je resurgis).

Problème du trimestre n°50
Proposé par F. Pétiard de Besançon

Soit $\{u_n\}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{11}{2} \\ u_1 = \dfrac{61}{11} \\ u_{n+2} = 111 - \dfrac{1130}{u_{n+1}} + \dfrac{3000}{u_n.u_{n+1}} \text{ pour tout } n \in N \end{cases}$$

Etudier la convergence de cette suite
1°) à l'aide de la calculatrice
2°) sans elle.

Pouvez-vous proposer une autre suite « du même genre » ?