

Résolution approchée d'une équation avec la calculatrice graphique.

Jacques VERDIER
Lycée Arthur Varoquaux
TOMBLAINE

A l'occasion d'un devoir surveillé en classe de première S.T.L. (option Biochimie), j'avais posé un certain nombre de questions concernant la fonction f définie par f

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}x + 1.$$

Le contrôle se terminait par cette question :

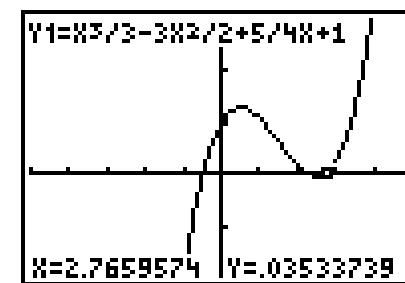
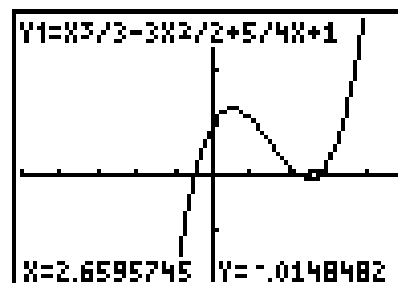
6°) Dédurre de ce qui précède le nombre de points d'intersection de C avec l'axe Ox .

Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de l'abscisse de celui qui est le plus à droite.
Pour cela, on décrira très clairement la démarche utilisée.

Il était facile de justifier l'existence d'une solution s de l'équation comprise entre $5/2$ et 3 puisque $f(5/2)$ valait $-1/24$ et $f(3)$ valait $1/4$. Mais là n'est pas le problème.

Beaucoup d'élèves ont utilisé la fonction TRACE de leur calculatrice pour aller « au plus près » du point recherché (qui était d'ailleurs, volonté de ma part, difficile à visualiser).

Comme beaucoup d'entre eux utilisent $X_{min}=5$ et $X_{max}=+5$, ils ont obtenu, sur la plupart de leurs machines, un des deux écrans suivants :



$X=2,6595745$ et $X=2,7659574$ sont les deux valeurs successives obtenues par TRACE, l'une donnant une ordonnée négative, et l'autre une ordonnée positive.

Les élèves ont donc donné une de ces deux valeurs, en « arrondissant » (comme le suggérait l'énoncé) à 10^{-4} près. Ce qui donne $s \approx 2,6596$ ou $s \approx 2,7660$ (je ne parlerai pas de ceux qui « tronquent », donnant $s \approx 2,6595$ ou $s \approx 2,7659$).

Lors de la correction, il s'est agi pour moi de leur faire comprendre **pourquoi** ils n'avaient pas donné une valeur approchée à 10^{-4} près ; leur argumentation était du type : « La machine donne un résultat avec 7 décimales, j'arrondis en n'en prenant que 4 ».

Explications :

Le « pas » entre deux points consécutifs de la fonction TRACE vaut

$$p = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{nb_{\text{pix}} - 1}$$

, où nb_{pix} est le nombre de pixels en largeur dans l'écran (1), est de l'ordre de 0,1 sur beaucoup de machines.

La méthode utilisée par les élèves ne donne donc qu'une approximation de l'ordre du dixième (grosso modo), contrairement à l'illusion des 7 chiffres affichés après la décimale.

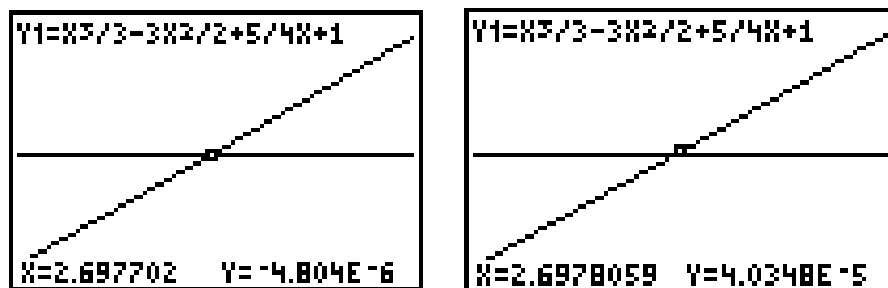
Pour aller plus loin, l'élève devra donc faire des **ZOOM** ⁽²⁾.

Sur la plupart des machines, la fonction **ZoomIn** (ou **ZoomFact**, ou commande équivalente) réalise une homothétie centrée sur la position du curseur ⁽²⁾.

Le rapport de cette homothétie est prévu par le constructeur (par exemple $k = 4$), mais il peut être modifié par l'utilisateur : on peut choisir par exemple $k = 10$.

Il faudra donc faire un certain nombre de ces **ZOOM** avant que l'écart entre l'abscisse de deux pixels consécutifs soit inférieure à 10^{-4} .

Voici un exemple obtenu après 5 zooms



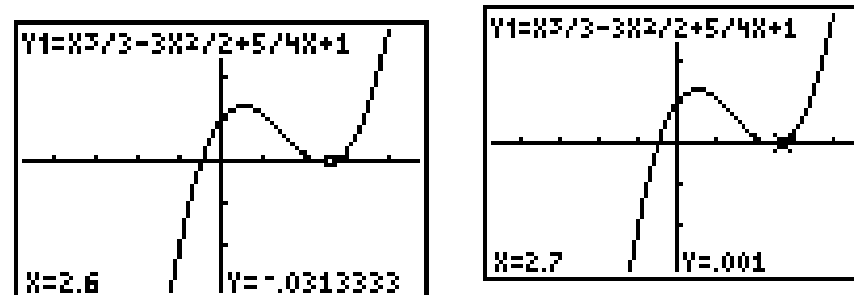
On a bien là un écart de l'ordre de 10^{-4} entre les deux valeurs consécutives, et on peut maintenant affirmer que $s \approx 2,6977$ à 10^{-4} près.

Pour une utilisation plus « rationnelle » des Zooms :

Commençons par utiliser un **RANGE** ou **WINDOW** tel que la fonction **TRACE** donne un pas de 0,1 ⁽⁴⁾

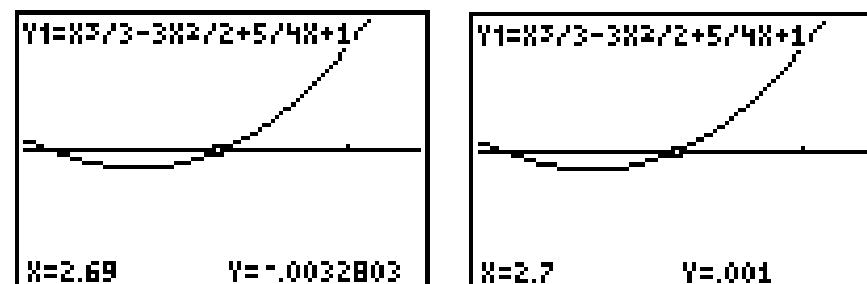
Cela est fait automatiquement par **ZDécimal** sur les Texas modèles TI80 à TI83, et par **INIT** sur les CASIO récentes.

Reprenons l'exercice au début. On obtient les deux écrans suivants avec **TRACE** :

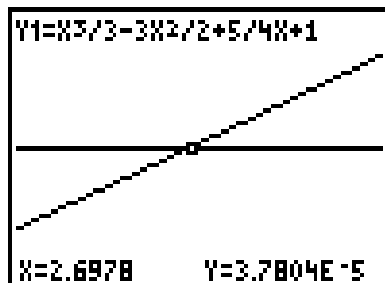
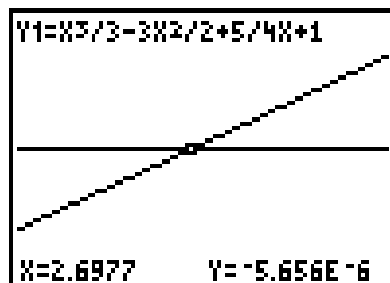


ce qui permet d'affirmer que $2,6 < s < 2,7$.

Choisissons le facteur d'homothétie $k = 10$. Après un premier Zoom, on obtient alors, en utilisant **TRACE** :



Après le troisième Zoom, on obtient les deux valeurs consécutives suivantes (voir page 13) :



Ce qui permet d'affirmer que $2,6977 < s < 2,6978$.
Et on a alors parfaitement répondu à la question posée dans l'énoncé.

Notes :

¹ Voir explications techniques dans la toute récente publication de l'IREM de Lorraine, « la calculatrice graphique au lycée », pages 39 à 43.

² Pour ceux qui disposent de tables de valeurs automatiques sur leur calculatrice, il y aurait moyen de travailler autrement ; mais ce n'est pas le cas de tous les élèves, aussi je n'aborderai pas cette méthode ici.

³ Il y a aussi la fonction **ZoomBox**, mais je ne l'aborderai pas ici, car elle ne permet pas de maîtriser le facteur d'agrandissement de la figure.

⁴ Voir explications techniques dans la brochure citée ci-dessus

