Problème du trimestre n°51
Énoncé proposé par Bernard PARZYSZ

On dispose d'un disque de 21 cm de diamètre, découpé dans une feuille de papier format A4.
Quelle est la dimension maximale d'un cube dont le patron (en un seul morceau) peut être réalisé dans ce disque ?
N.B. On ne tiendra pas compte des « languettes » d'assemblage.

Envoyez vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à
Bernard PARZYSZ, 3 rue Marie Sautet, 57000 METZ.

Solution du problème n°50
Énoncé proposé par F. PÉTIARD de BESANÇON

Soit $\{u_n\}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{11}{2} \\ u_1 = \dfrac{61}{11} \\ u_{n+2} = 111 - \dfrac{1130}{u_{n+1}} + \dfrac{3000}{u_n . u_{n+1}} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Étudiez la convergence de cette suite
1°) à l'aide da la calculatrice
2°) sans elle.
Pouvez-vous proposer une autre suite « du même genre » ?

Malgré les vacances, quatre réponses ont été envoyées, par Bernard CHRETIEN (55 Verdun), Geneviève D'ANDREA (57 Thionville), Pol LE GALL (57 Rombas) et Jacques VERDIER (54 Tomblaine).

1- Étude de la suite à l'aide de la calculatrice.

Tous les correspondants ont remarqué le comportement étrange de cette suite récurrente, programmée sur leur calculatrice :
- sur Casio fx-7700 G, elle croît lentement de 5,5 à 5,879... (pour $n = 9$), puis "saute" en quelques bonds ($u_{14} = 9{,}850$ ...) jusqu'au voisinage de 100, atteint pour n = 21;
- avec le tableur Excel, elle croit lentement jusqu'à 5,897... ($n = 13$), puis passe ensuite par quelques valeurs "erratiques" ($u_{14} = 5{,}647...$, $u_{15} = 0{,}968...$, $u_{16} = -507{,}321...$, $u_{17} = 107, 120$ ...), et semble ensuite converger vers 100 (atteint pour $n = 28$);
- sur TI 92 (mode "calcul séquentiel automatique"), même type de phénomène : croissance lente jusqu'à 5,848... ($n = 10$), puis "vagabondage" pour $11 \leq n \leq 14$, et enfin convergence apparente vers 100.

2- Étude théorique (B. Chrétien, G. d'Andrea).

(On peut tout d'abord chercher les limites possibles a priori, en résolvant l'équation $l = 111 - \dfrac{1130}{l} + \dfrac{3000}{l^2}$ qui admet les 3 solutions 5, 6 et 100.)

L'examen des premiers termes de la suite permet de faire la conjecture que le terme général peut s'écrire $u_n = \dfrac{6^{n+1} + 5^{n+1}}{6^n + 5^n}$ pour tout entier naturel n, conjecture que l'on démontre ensuite sans difficulté grâce à un raisonnement par récurrence.

On peut alors écrire u_n sous la forme $u_n = \dfrac{6 + 5 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n}{1 + \left(\frac{5}{6}\right)^n}$, ce qui montre que la suite converge vers 6 (qui est bien l'une des valeurs possibles). La théorie indique donc que la suite converge vers 6, tandis que, nous l'avons vu, les calculatrices montrent que les termes successifs "sautent" par-dessus la valeur 6, pour sembler converger vers 100. Alors ???

3- Comment expliquer cette (légère !) différence ?

J. Verdier s'est intéressé à cette question, et voici son analyse, basée sur la TI 92 (voir ci

-après les 15 copies d'écran qu'il fournit). Nous lui laissons donc la parole :

Ce que l'on obtient avec une TI 92 (ou une Voyage 200) ne diffère aucunement, quand on utilise le mode "calcul séquentiel automatique", de ce que donnent les autres calculatrices (voir plus haut). Par contre, si on utilise les possibilités de la TI 92 pour calculer les valeurs exactes de u_i sous forme fractionnaire (sans utiliser la méthode automatique), on obtient les valeurs que l'on peut lire sur les écrans 1 à 6 (N.B.: j'ai appelé a_i les résultats pour que, stockés en mémoires, ils ne "percutent" pas les u_i). J'ai ensuite demandé les valeurs approchées de ces fractions a_i, et on peut lire les résultats sur les écrans 7, 8 et 9 (cela semble confirmer la convergence vers 6). Les écrans 10, 11 et 12 correspondent au calcul automatique en mode « séquentiel ». Les écrans 13 et 14 permettent de bien voir le décalage qui se produit, à partir du 12^e rang, entre les a_i (calculés "comme à la main") et les u_i (calculés en mode séquentiel automatique).

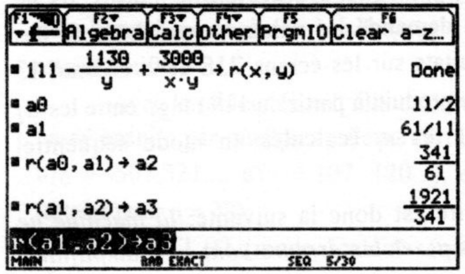
L'hypothèse, que l'on peut faire est donc la suivante : ***la machine ne calcule pas les valeurs exactes des u_i, et les erreurs vont en s'amplifiant, finissant par atteindre des proportions considérables***.

Théoriquement (voir ci-dessus), on démontre que, selon les valeurs choisies pour u_0 et u_1, la suite peut converger, soit vers 5, soit vers 6, soit vers 100. En prenant des valeurs initiales un peu au hasard, sans méthode, on constate que la calculatrice finit toujours par amener les termes à 100. Mais, en choisissant $u_0 = u_1 = 5$ (suite stationnaire), la machine ne se trompe pas, car les divisions par 5 et 25 tombent juste, et la machine les fait exactement. Par contre, en choisissant $u_0 = u_1 = 6$ (autre suite stationnaire), on s'aperçoit que la machine donne des résultats différents de 6 (voir écrans 15 à 18)... qui finissent par aller vers 100 ! Essayons donc de voir d'un peu plus près ce qui est en fait calculé.

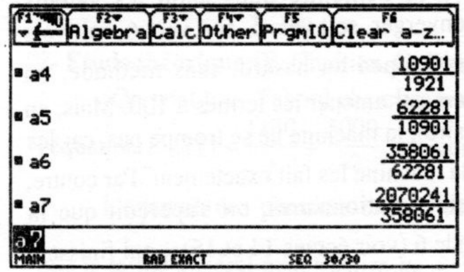
La TI 92 travaille avec 14 chiffres significatifs dans ses registres. Ce qui fait que, par exemple, le calcul de $-\dfrac{1130}{6}$ donne – 188,333 333 333 33 (11 chiffres **3** derrière la virgule), et que le calcul de $\dfrac{3000}{36}$ donnera 83,333 333 333 333 (12 chiffres **3** derrière la virgule). Ce qui conduira, pour $111-\dfrac{1130}{6}+\dfrac{3000}{36}$, à $u_2 = 111 -$ 188,333 333 333 33 + 83,333 333 333 333 = 6,000 000 000 003.
Ce n'est déjà plus 6…

L'erreur, ici de 3×10^{-12}, est donc due uniquement au nombre de chiffres utilisés dans les registres internes de la calculatrice. Pour un autre modèle, le même type d'erreur se

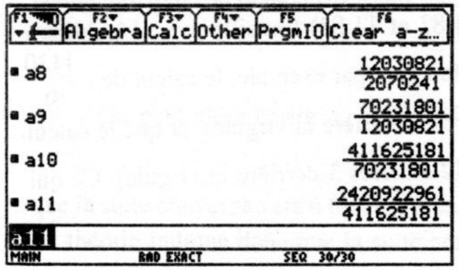
COPIES D'ÉCRANS
(T.I.92)
PROBLÈME DE PETIARD
(BESANÇON)



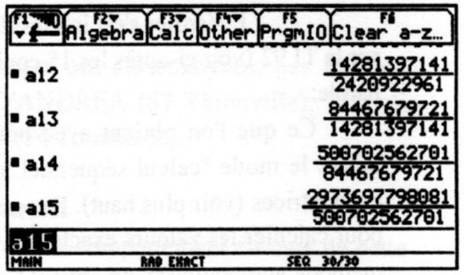
1



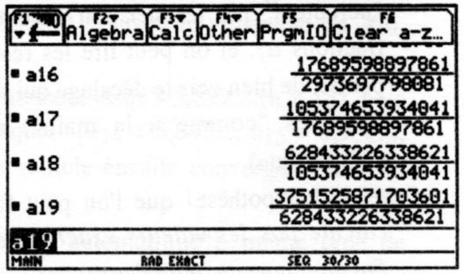
2



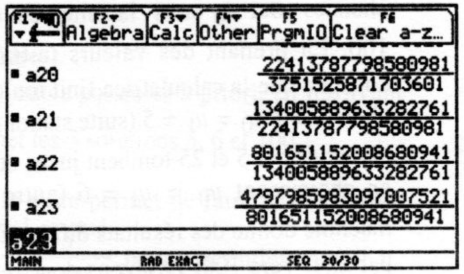
3



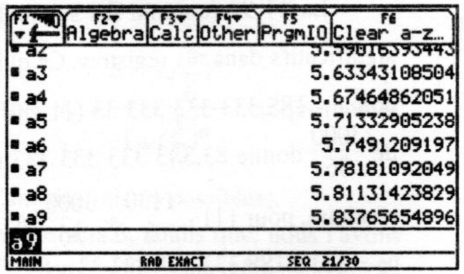
4



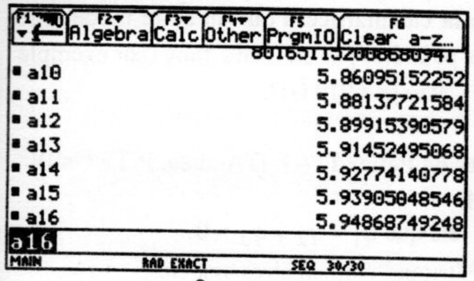
5



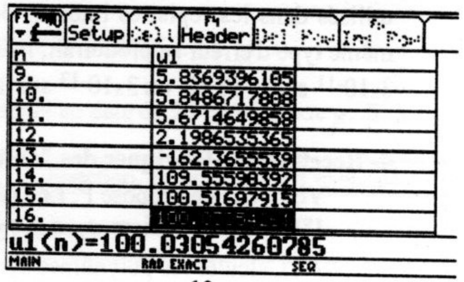
6



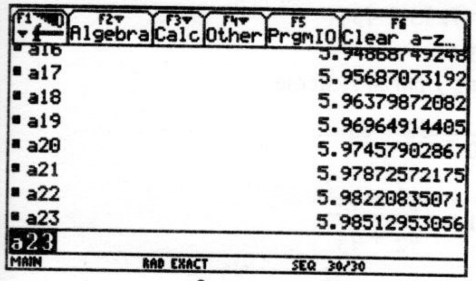
7



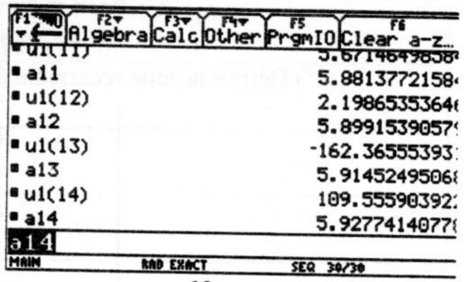
8



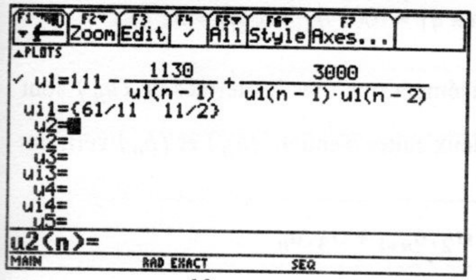
12



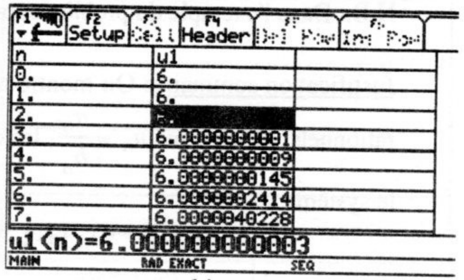
9



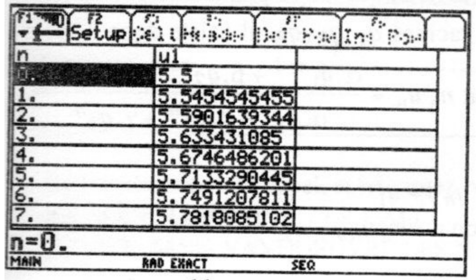
13



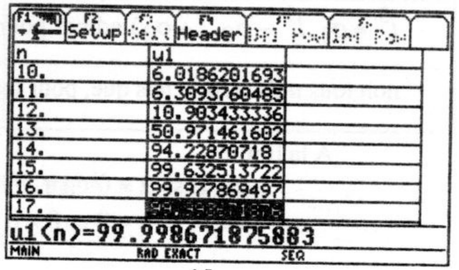
10



14



11



15

PETIT VERT N°51. SEPTEMBRE 1997

produirait, mais pas nécessairement au même rang (par exemple 3×10^{-11} sur la TI 82, ou 3×10^{-13} sur la Casio fx-G6910).

4- Recette pour fabriquer des « suites de Pétiard » (G. d'Andréa, P Le Gall)

Voici ce que propose Pol Le Gall :

1°) Choisir trois entiers q_1, q_2 et q_3 tels que $q_1 > q_2 > q_3 > 0$.
2°) Calculer les polynômes symétriques élémentaires associés :

$$\sigma_1 = q_1 + q_2 + q_3$$
$$\sigma_2 = q_1q_2 + q_3q_1 + q_2q_3$$
$$\sigma_3 = q_1q_2q_3$$

3°) Définir la suite récurrente $\{u_n\}$ par le système :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{q_2+q_3}{2} \\ u_1 = \dfrac{q_2^2+q_3^2}{q_2+q_3} \\ u_{n+2} = \sigma_1 - \dfrac{\sigma_2}{u_{n+1}} + \dfrac{\sigma_3}{u_n \times u_{n+1}} \end{cases}$$

N.B. Dans l'exemple du problème, on avait $q_1 = 100$, $q_2 = 6$ et $q_3 = 5$.

Justification sommaire :
On montre aisément que tous les termes de $\{u_n\}$ sont rationnels, de la forme $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$, les deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ vérifiant le système :

$$\begin{cases} a_{n+3} = \sigma_1.a_{n+2} - \sigma_2.a_{n+1} + \sigma_3.a_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$$

Par construction, l'équation caractéristique de la première relation (soit $l^3 = \sigma_1.l^2 - \sigma_2.l + \sigma_3$) admet pour racines q_1, q_2 et q_3. Il existe donc trois réels non tous nuls α, β, et γ tels que, pour tout n, $u_n = \dfrac{\alpha q_1^{n+1} + \beta q_2^{n+1} + \gamma q_3^{n+1}}{\alpha q_1^n + \beta q_2^n + \gamma q_3^n}$.
A la limite :
- cas 1 : si $\alpha \neq 0$, on a $\lim(u_n) = q_1$;
- cas 2 : si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$, on a $\lim(u_n) = q_2$.

Pour ne pas se trouver dans le cas 1, il faut donc que l'on ait $\alpha = 0$.
On peut, par exemple, se proposer de déterminer u_0 et u_1 tels que $(\alpha,\beta,\gamma) = (0,1,1)$. On prend alors $u_0 = \dfrac{q_2 + q_3}{2}$ et $u_1 = \dfrac{q_2^2 + q_3^2}{q_2 + q_3}$.
Comme on l'a vu plus haut, le comportement de la suite à la calculatrice repose sur le cumul des erreurs d'arrondis, en particulier pour u_0 et u_1. Si u_1 n'est pas décimal, la calculatrice en prend une valeur décimale approchée, ce qui revient à avoir un cœfficient α « pas tout à fait nul ». On tombe alors sur le cas 1 au lieu du cas 2 théoriquement attendu, et on obtient q_1 (le plus grand des trois entiers choisis) pour limite en lieu et place de q_2. Il convient donc, pour qu'un tel « dysfonctionnement fonctionne », que u_0 et u_1 ne soient pas décimaux (au sens de la calculatrice).

Extensions possibles :

On peut, au lieu d'un triplet (q_1, q_2, q_3), partir d'un n-uplet $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ (avec $n \geq 4$) et procéder de manière analogue. Ainsi, pour $n = 4$, on obtiendra le système :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{q_2 + q_3 + q_4}{2} \\ u_1 = \dfrac{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}{q_2 + q_3 + q_4} \\ u_2 = \dfrac{q_2^3 + q_3^3 + q_4^3}{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} \\ u_{n+3} = \sigma_1 - \dfrac{\sigma_2}{u_{n+2}} + \dfrac{\sigma_3}{u_{n+2} \times u_{n+1}} - \dfrac{\sigma_4}{u_{n+2} \times u_{n+1} \times u_n} \end{cases}$$

On peut, au contraire, chercher une version « minimaliste » en partant d'un couple (q_1, q_2). En posant comme à l'accoutumée $q_1 + q_2 = s$ et $q_1.q_2 = p$, on obtient cette fois le système :

$$\begin{cases} u_0 = q_2 \\ u_{n+1} = s - \dfrac{p}{u_n} \end{cases}$$

On a alors une situation de récurrence homographique :
Si q_2 n'est pas décimal (au sens de la machine), on retrouve le cas étudié précédemment. La situation est alors plus classique ; elle rejoint celle de la suite

(Suite page 13)

—

(Suite de la page 12)
"chaotique" définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0,7 \\ u_{n+1} = \dfrac{10}{3} u_n (1 - u_n) \end{cases}$$

, suite théoriquement stationnaire, mais qui diverge sur la calculatrice par suite de l'arrondi que celle-ci effectue sur $\dfrac{10}{3}$.