

Problème du trimestre n°51
Énoncé proposé par Bernard PARZYSZ

On dispose d'un disque de 21 cm de diamètre, découpé dans une feuille de papier format A4.

Quelle est la dimension maximale d'un cube dont le patron (en un seul morceau) peut être réalisé dans ce disque ?

N.B. On ne tiendra pas compte des « languettes » d'assemblage.

Envoyez vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème,
à
Bernard PARZYSZ, 3 rue Marie Sautet, 57000 METZ.

Solution du problème n°50
Énoncé proposé par F. PÉTIARD de BESANÇON

Soit $\{u_n\}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{11}{2} \\ u_1 = \frac{61}{11} \\ u_{n+2} = 111 - \frac{1130}{u_{n+1}} + \frac{3000}{u_n \cdot u_{n+1}} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Étudiez la convergence de cette suite

1°) à l'aide de la calculatrice

2°) sans elle.

Pouvez-vous proposer une autre suite « du même genre » ?

Malgré les vacances, quatre réponses ont été envoyées, par Bernard CHRETIEN (55 Verdun), Geneviève D'ANDREA (57 Thionville), Pol LE GALL (57 Rombas) et Jacques VERDIER (54 Tomblaine).

1- Étude de la suite à l'aide de la calculatrice.

Tous les correspondants ont remarqué le comportement étrange de cette suite récurrente, programmée sur leur calculatrice :

- sur Casio fx-7700 G, elle croît lentement de 5,5 à 5,879... (pour $n = 9$), puis "saute" en quelques bonds ($u_{14} = 9,850 \dots$) jusqu'au voisinage de 100, atteint pour $n = 21$;

- avec le tableur Excel, elle croît lentement jusqu'à 5,897... ($n = 13$), puis passe ensuite par quelques valeurs "erratiques" ($u_{14} = 5,647\dots$, $u_{15} = 0,968\dots$, $u_{16} = -507,321\dots$, $u_{17} = 107, 120 \dots$), et semble ensuite converger vers 100 (atteint pour $n = 28$);

- sur TI 92 (mode "calcul séquentiel automatique"), même type de phénomène : croissance lente jusqu'à 5,848... ($n = 10$), puis "vagabondage" pour $11 \leq n \leq 14$, et enfin convergence apparente vers 100.

2- Étude théorique (B. Chrétien, G. d'Andrea).

(On peut tout d'abord chercher les limites possibles a priori, en résolvant l'équation

$$l = 111 - \frac{1130}{l} + \frac{3000}{l^2} \text{ qui admet les 3 solutions 5, 6 et 100.}$$

L'examen des premiers termes de la suite permet de faire la conjecture que le terme

général peut s'écrire $u_n = \frac{6^{n+1} + 5^{n+1}}{6^n + 5^n}$ pour tout entier naturel n , conjecture que l'on démontre ensuite sans difficulté grâce à un raisonnement par récurrence.

$$u_n = \frac{6 + 5 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n}{1 + \left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

On peut alors écrire u_n sous la forme $\frac{6 + 5 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n}{1 + \left(\frac{5}{6}\right)^n}$, ce qui montre que la suite converge vers 6 (qui est bien l'une des valeurs possibles). La théorie indique donc que la suite converge vers 6, tandis que, nous l'avons vu, les calculatrices montrent que les termes successifs "sautent" par-dessus la valeur 6, pour sembler converger vers 100. Alors ???

3- Comment expliquer cette (légère !) différence ?

J. Verdier s'est intéressé à cette question, et voici son analyse, basée sur la TI 92 ([voir ci](#)

-après les 15 copies d'écran qu'il fournit). Nous lui laissons donc la parole :

Ce que l'on obtient avec une TI 92 (ou une Voyage 200) ne diffère aucunement, quand on utilise le mode "calcul séquentiel automatique", de ce que donnent les autres calculatrices (voir plus haut). Par contre, si on utilise les possibilités de la TI 92 pour calculer les valeurs exactes de u sous forme fractionnaire (sans utiliser la méthode automatique), on obtient les valeurs que l'on peut lire sur les écrans 1 à 6 (N.B.: j'ai appelé a_i les résultats pour que, stockés en mémoires, ils ne "percutent" pas les u_i). J'ai ensuite demandé les valeurs approchées de ces fractions a_i , et on peut lire les résultats sur les écrans 7, 8 et 9 (cela semble confirmer la convergence vers 6). Les écrans 10, 11 et 12 correspondent au calcul automatique en mode « séquentiel ». Les écrans 13 et 14 permettent de bien voir le décalage qui se produit, à partir du 12^{ang}, entre les a (calculés "comme à la main") et les u_i (calculés en mode séquentiel automatique).

L'hypothèse, que l'on peut faire est donc la suivante : **la machine ne calcule pas les valeurs exactes des u_i , et les erreurs vont en s'amplifiant, finissant par atteindre des proportions considérables.**

Théoriquement (voir ci-dessus), on démontre que, selon les valeurs choisies pour u_0 et u_1 , la suite peut converger, soit vers 5, soit vers 6, soit vers 100. En prenant des valeurs initiales un peu au hasard, sans méthode, on constate que la calculatrice finit toujours par amener les termes à 100. Mais, en choisissant $u_0 = u_1 = 5$ (suite stationnaire), la machine ne se trompe pas, car les divisions par 5 et 25 tombent juste, et la machine les fait exactement. Par contre, en choisissant $u_0 = u_1 = 6$ (autre suite stationnaire), on s'aperçoit que la machine donne des résultats différents de 6 (voir écrans 15 à 18)... qui finissent par aller vers 100 ! Essayons donc de voir d'un peu plus près ce qui est en fait calculé.

La TI 92 travaille avec 14 chiffres significatifs dans ses registres. Ce qui fait que, par

exemple, le calcul de $\frac{1130}{6}$ donne - 188,333 333 333 33 (11 chiffres 3 derrière la

virgule), et que le calcul de $\frac{3000}{36}$ donnera 83,333 333 333 333 (12 chiffres 3 derrière

la virgule). Ce qui conduira, pour $111 - \frac{1130}{6} + \frac{3000}{36}$, à $u_2 = 111 - 188,333 333 333 33 + 83,333 333 333 333 = 6,000 000 000 003$. Ce n'est déjà plus 6...

L'erreur, ici de 3×10^{-12} , est donc due uniquement au nombre de chiffres utilisés dans les registres internes de la calculatrice. Pour un autre modèle, le même type d'erreur se

COPIES D'ÉCRANS
(T.I.92)
PROBLÈME DE PETIARD
(BESANÇON)

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
a12					14281397141
					2420922961
a13					84467679721
					14281397141
a14					500702562701
					84467679721
a15					2973697790001
					500702562701
a15					
MAIN BAD EXACT SEQ 30/30					

4

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
$111 - \frac{1130}{y} + \frac{3000}{x \cdot y} \rightarrow r(x, y)$ Done					
a0					11/2
a1					61/11
r(a0, a1) + a2					341
					61
r(a1, a2) + a3					1921
					341
r(a1, a2) + a3					
MAIN BAD EXACT SEQ 5/30					

1

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
a16					17689598897861
					2973697790001
a17					105374653934041
					17689598897861
a18					628433226338621
					105374653934041
a19					3751525071703601
					628433226338621
a19					
MAIN BAD EXACT SEQ 30/30					

5

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
a4					10901
					1921
a5					62281
					10901
a6					350061
					62281
a7					2070241
					350061
a7					
MAIN BAD EXACT SEQ 30/30					

2

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
a20					22413787798500981
					3751525071703601
a21					134005809633282761
					22413787798500981
a22					001651152000600941
					134005809633282761
a23					4797905903097007521
					001651152000600941
a23					
MAIN BAD EXACT SEQ 30/30					

6

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
a8					12030821
					2070241
a9					70231801
					12030821
a10					411625181
					70231801
a11					2420922961
					411625181
a11					
MAIN BAD EXACT SEQ 30/30					

3

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
a2					5.59016393443
a3					5.63343100504
a4					5.67464862051
a5					5.71332905238
a6					5.7491209197
a7					5.78181092049
a8					5.81131423829
a9					5.83765654896
a9					
MAIN BAD EXACT SEQ 21/30					

7

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clear a-z...	
a10				5.86095152252	
a11				5.88137721584	
a12				5.89915390579	
a13				5.91452495068	
a14				5.92774140778	
a15				5.93905848546	
a16				5.94868749248	
u1(n)=100.03054260785					

8

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Setup	Cell	Header	Del	Pol	Int
n	u1				
9.				5.8369396105	
10.				5.8486717868	
11.				5.6714649858	
12.				2.1986535365	
13.				-162.3655393	
14.				109.55590392	
15.				100.51697915	
16.					
u1(n)=100.03054260785					

12

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clear a-z...	
a16				5.94868749248	
a17				5.95687073192	
a18				5.96379872082	
a19				5.96964914405	
a20				5.97457902867	
a21				5.97872572175	
a22				5.98220835071	
a23				5.98512953056	
u1(n)=100.03054260785					

9

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clear a-z...	
u1(11)				5.6714649858	
a11				5.88137721584	
u1(12)				2.1986535364	
a12				5.89915390579	
u1(13)				-162.3655393	
a13				5.91452495068	
u1(14)				109.55590392	
a14				5.92774140778	
u1(n)=100.03054260785					

13

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Zoom	Edit	All	Style	Axes...		
u1=111 - 1130 / (61/11 - 11/2) + 3000 / (11/2)						
u1=(61/11 - 11/2) + 3000 / (11/2)						
u2						
u3						
u4						
u5						
u1(n)=100.03054260785						

10

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Setup	Cell	Header	Del	Pol	Int
n	u1				
0.				6.	
1.				6.	
2.				6.0000000001	
3.				6.0000000009	
4.				6.0000000145	
5.				6.0000002414	
6.				6.0000040228	
7.					
u1(n)=6.00000000003					

14

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Setup	Cell	Header	Del	Pol	Int	Pol
n	u1					
0.				5.5		
1.				5.5454545455		
2.				5.5901639344		
3.				5.633431085		
4.				5.6746486201		
5.				5.7133290445		
6.				5.7491207811		
7.				5.7818085102		
u1(n)=100.03054260785						

11

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Setup	Cell	Header	Del	Pol	Int
n	u1				
10.				6.0186201693	
11.				6.3093760485	
12.				10.903433336	
13.				50.971461602	
14.				94.22870718	
15.				99.632513722	
16.				99.977869497	
17.					
u1(n)=99.998671875803					

15

produirait, mais pas nécessairement au même rang (par exemple 3×10^{-11} sur la TI 82, ou 3×10^{-13} sur la Casio fx-G6910).

4- Recette pour fabriquer des « suites de Pétiard » (G. d'Andréa, P Le Gall)

Voici ce que propose Pol Le Gall :

- 1°) Choisir trois entiers q_1, q_2 et q_3 tels que $q_1 > q_2 > q_3 > 0$.
- 2°) Calculer les polynômes symétriques élémentaires associés :

$$\sigma = q_1 + q_2 + q_3$$

$$\sigma_2 = q_1q_2 + q_2q_1 + q_2q_3$$

$$\sigma_3 = q_1q_2q_3$$

- 3°) Définir la suite récurrente $\{u_n\}$ par le système :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{q_2 + q_3}{2} \\ u_1 = \frac{q_2^2 + q_3^2}{q_2 + q_3} \\ u_{n+2} = \sigma - \frac{\sigma_2}{u_{n+1}} + \frac{\sigma_3}{u_n \times u_{n+1}} \end{cases}$$

N.B. Dans l'exemple du problème, on avait $q_1 = 100, q_2 = 6$ et $q_3 = 5$.

Justification sommaire :

On montre aisément que tous les termes de $\{u_n\}$ sont rationnels, de la forme

$$u_n = \frac{a_n}{b_n}, \text{ les deux suites } \{a_n\} \text{ et } \{b_n\} \text{ vérifiant le système :}$$

$$\begin{cases} a_{n+3} = \sigma \cdot a_{n+2} - \sigma_2 \cdot a_{n+1} + \sigma_3 \cdot a_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$$

Par construction, l'équation caractéristique de la première relation (soit

$$l^3 = \sigma \cdot l^2 - \sigma_2 \cdot l + \sigma_3$$

) admet pour racines q_1, q_2 et q_3 . Il existe donc trois réels non

$$u_n = \frac{\alpha q_1^{n+1} + \beta q_2^{n+1} + \gamma q_3^{n+1}}{\alpha q_1^n + \beta q_2^n + \gamma q_3^n}$$

tous nuls α, β , et γ tels que, pour tout n ,

A la limite :

- cas 1 : si $\alpha \neq 0$, on a $\lim(u_n) = q_1$;
- cas 2 : si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$, on a $\lim(u_n) = q_2$.

Pour ne pas se trouver dans le cas 1, il faut donc que l'on ait $\alpha = 0$.

On peut, par exemple, se proposer de déterminer u_0 et u_1 tels que $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, 1)$. On

$$u_0 = \frac{q_2 + q_3}{2} \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{q_2^2 + q_3^2}{q_2 + q_3}$$

prend alors
Comme on l'a vu plus haut, le comportement de la suite à la calculatrice repose sur le cumul des erreurs d'arrondis, en particulier pour u_0 et u_1 . Si u_1 n'est pas décimal, la calculatrice en prend une valeur décimale approchée, ce qui revient à avoir un coefficient α « pas tout à fait nul ». On tombe alors sur le cas 1 au lieu du cas 2 théoriquement attendu, et on obtient q_1 (le plus grand des trois entiers choisis) pour limite en lieu et place de q . Il convient donc, pour qu'un tel « dysfonctionnement fonctionne », que u_0 et u_1 ne soient pas décimaux (au sens de la calculatrice).

Extensions possibles :

On peut, au lieu d'un triplet (q_1, q_2, q_3) , partir d'un n -uplet (q_1, q_2, \dots, q_n) (avec $n \geq 4$) et procéder de manière analogue. Ainsi, pour $n = 4$, on obtiendra le système :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{q_2 + q_3 + q_4}{2} \\ u_1 = \frac{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}{q_2 + q_3 + q_4} \\ u_2 = \frac{q_2^3 + q_3^3 + q_4^3}{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} \\ u_{n+3} = \sigma - \frac{\sigma_2}{u_{n+2}} + \frac{\sigma_3}{u_{n+2} \times u_{n+1}} - \frac{\sigma_4}{u_{n+2} \times u_{n+1} \times u_n} \end{cases}$$

On peut, au contraire, chercher une version « minimaliste » en partant d'un couple (q_1, q_2) . En posant comme à l'accoutumée $q_1 + q_2 = s$ et $q_1 \cdot q_2 = p$, on obtient cette fois le système :

$$\begin{cases} u_0 = q_2 \\ u_{n+1} = s - \frac{p}{u_n} \end{cases}$$

On a alors une situation de récurrence homographe :

Si q_2 n'est pas décimal (au sens de la machine), on retrouve le cas étudié précédemment. La situation est alors plus classique ; elle rejoint celle de la suite

(Suite page 13)

(Suite de la page 12)

"chaotique" définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0,7 \\ u_{n+1} = \frac{10}{3}u_n(1-u_n) \end{cases}$$

, suite théoriquement stationnaire, mais qui diverge sur la calculatrice par suite de l'arrondi que celle-ci effectue sur

$$\frac{10}{3}$$

