

Solution du problème précédent (n°47).
énoncé proposé par Bernard PARZYSZ

Quels sont les entiers naturels qui sont sommes d'entiers naturels (au moins trois) en progression arithmétique ?

Trois solutions seulement pour ce problème d'arithmétique, toutes trois placées sous le signe de l'IUFM de Lorraine : celles de Janick BERG (88 FRAIZE, stagiaire IUFM), de Philippe CABASSON (57 Forbach, ex stagiaire IUFM) et de Pol LE GALL (57 Courcelles-Chaussy, formateur IUFM). J'aurais espéré davantage de réponses, d'autant plus qu'une "exploration" préliminaire sur les premiers entiers permettait de conjecturer assez aisément le résultat.

Certes, l'énoncé était ambigu, puisqu'il ne précisait pas :

- si les entiers considérés dans la progression doivent être non nuls (mais le fait d'imposer ou non cette condition ne change pas fondamentalement le résultat, cf. ci-dessous)
- si la raison doit être non nulle (sinon, tout entier n supérieur ou égal à 3 répond à la question, car $n = 1 + \dots + 1$, mais le problème devient nettement moins intéressant).

Les trois réponses reçues se placent (raisonnablement) dans le cas d'une raison non nulle, et ne considèrent aucune restriction sur les termes de la progression. Je me contenterai ici de donner une solution qui synthétise ces trois réponses (réponses toutes correctes par ailleurs).

Remarques préliminaires:

Appelons n l'entier considéré, a le premier terme de la progression arithmétique, p son nombre de termes et r sa raison. On peut toujours supposer $r > 0$ (en inversant au besoin l'ordre des termes de la progression).

Le problème revient donc, étant donné n , à trouver a , p (≥ 3) et r (> 0) tels que

$$n = pa + \frac{1}{2} p(p-1)r \quad (1)$$

Lemme 1: Tout nombre pair supérieur ou égal à 10 satisfait à (1), avec $p = 4$.

a) Considérons d'abord les entiers de la forme $4k + 6$ (soit $n \equiv 2 \pmod{4}$, avec $n \geq 6$) : il suffit de remarquer que $4k + 6 = k + (k+1) + (k+2) + (k+3)$, soit $a = k$ et $r = 1$.

b) Si, maintenant $n = 4k + 12$ (soit $n \equiv 0 \pmod{4}$, avec $n \geq 12$), alors on a : $4k + 12 = k + (k+2) + (k+4) + (k+6)$, soit $a = k$ et $r = 2$.

Le lemme est démontré.

Lemme 2 : Les nombres 2, 4 et 8 ne satisfont pas à (1).

En effet, les plus petits totaux possibles sont :

- avec 3 termes: $3 = 0+1+2$; $6 = 1+2+3 = 0+2+4$

- avec 4 termes: $6 = 0+1+2+3$; $10 = 1+2+3+4$

- avec 5 termes: $10 = 0+1+2+3+4$.

Bien entendu, avec plus de 5 termes le total sera supérieur à 10.

Lemme 3 : Le seul nombre premier satisfaisant à (1) est 3.

2 est exclu, et 3 satisfait à 1 (cf. ci-dessus).

Soit n un nombre premier satisfaisant à (1). On a vu que l'on a

$$n = p \left[a + \frac{1}{2}(p-1)r \right] \quad (1)$$

Si p est impair, alors l'expression entre crochets est entière, et il en résulte que p divise n . Ce qui implique que n ne saurait être premier, sauf si $p = n$. Mais alors

on a $a + \frac{1}{2}(p-1)r = 1$, ce qui impose $p = 3$, $a = 0$ et $r = 1$, d'où $n = 3$.

Si p est pair, posons $p = 2q$ (avec $q \geq 2$). On peut alors écrire $n = q[2a + (2q-1)r]$. Comme ci-dessus, ceci implique $q = n$ et $2a + (2q-1)r = 1$, ce qui est impossible avec $q \geq 2$. Le lemme est démontré.

Lemme 4 : Tous les nombres impairs non premiers satisfont à (1).

Soit n un nombre impair composé, et d son plus petit diviseur premier ($d \geq 3$).

Le choix $p = d, r = 1, a = \frac{n}{d} - \frac{d-1}{2}$ permet de vérifier la relation (1) :

en effet, on peut écrire $n = d \left[\frac{n}{d} - \frac{d-1}{2} + \frac{d-1}{2} \right]$ et on a bien $a \geq 0$, car

$$\frac{n}{d} \geq d \geq d - 1 \geq \frac{d-1}{2}.$$

Des trois lemmes précédents il résulte immédiatement :

Théorème : Les nombres entiers qui peuvent s'écrire comme somme d'au moins trois entiers distincts en progression arithmétique sont, outre 3, les entiers non premiers supérieurs ou égaux à 6, à l'exclusion de 8.

Remarque :

En imposant aux termes de la progression d'être non nuls, ce théorème devient :

Les nombres entiers qui peuvent s'écrire comme somme d'au moins trois entiers distincts non nuls en progression arithmétique sont les entiers non premiers supérieurs ou égaux à 6, à l'exclusion de 8.

Problème du trimestre n°48

Énoncé extrait de l'ouvrage de POLYA
« Comment poser et résoudre un problème »

Construire un triangle connaissant la valeur α de l'angle A,
la hauteur h issue de A, et le périmètre p .

Envoyez vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à
Bernard PARZYSZ, 3 rue Marie Sautet, 57000 METZ.