Problème du trimestre n°47

énoncé proposé par Bernard PARZYSZ

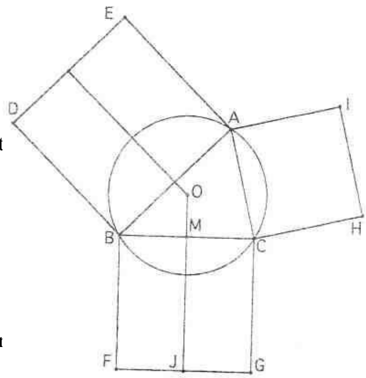
Quels sont les entiers naturels qui sont sommes d'entiers naturels (au moins trois) en progression arithmétique ?

Solution du problème précédent (n°46).

Soit un triangle ABC. Extérieurement à ce triangle, on construit les 3 carrés ABED, BCGF et CAIH.

Il est évident que si ABC est un triangle équilatéral, les six points DEFGHI sont cocycliques. Mais est-il possible que ces six points soient cocycliques sans que le triangle ABC ne soit équilatéral ?

Nous avons reçu trois réponses à ce problème: celles de Philippe CABASSON (57, Schœneck), Denis PEPIN (55, Belrupt) et André VIRICEL (54, Villers-les-Nancy).



Les trois auteurs commencent par remarquer que, si les 6 points D, E, F, G, H, I sont situés sur un même cercle (*cf. figure*), le centre O de ce cercle est nécessairement le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. En effet, puisque ABED est un carré, [DE] et [AB] ont même médiatrice ; et il en est de même pour [FGI et [BC] d'une part, et [HI] et [CA] d'autre part.

Nos trois collègues se subdivisent ensuite en deux écoles : l'une utilisant des calculs trigonométriques (Ph. Cabasson, A. Viricel), l'autre se plaçant dans le plan complexe (D. Pépin).

Première école : on oriente le plan de façon que le triangle ABC soit direct, et on se propose de calculer OF et OH (on utilise les notations usuelles dans le triangle) :

a) on a, en notant J le milieu de [FG] : $OF^2 = FJ^2 + OJ^2$ (Pythagore).

D'autre part, on a $FJ = \frac{a}{2}$ et (en notant M le milieu de [BC]) : $OM^2 = OB^2 - MB^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$.

On a également (triangle OMB) les relations : $\sin MOB = \frac{a}{2R}$, soit encore $a = 2R \sin MOB$,

et $\tan MOB = \frac{BM}{OM}$, d'où $OM = \frac{BM}{\tan MOB} = \frac{a}{2 \tan MOB}$.

Du côté des angles, on a $2(OB,OM) = (OB,OC) = 2(AB,AC)$ (angle au centre et angle inscrit).

D'où $\left|\sin(OB,OM)\right| = \left|\sin(AB,AC)\right|$, ou encore $\sin MOB = \sin A$. On peut alors écrire $a = 2R \sin A$.

Remarquons également que A et O sont du même côté (*resp. de part et d'autre*) de (BC) si et seulement si A est aigu (*resp. obtus*) :

- dans le premier cas, on a $OJ = OM + MJ$, et $\tan MOB = \tan A$ (car $\tan A > 0$). D'où $OJ = \frac{a}{2\tan A} + a$.
- dans le second cas, on a $OJ = MJ - OM$, et $\tan MOB = -\tan A$ (car $\tan A < 0$). D'où $OJ = a - \frac{a}{-2\tan A}$

Dans tous les cas, on a donc $OJ = \frac{a}{2\tan A} + a = R\cos A + 2R\sin A$ (cette formule est encore valable lorsque le triangle ABC est rectangle en A.).

Finalement :

$$OF^2 = R^2\sin^2 A + (R\cos A + 2R\sin A)^2 = R^2(5 - 4\cos^2 A + 4\sin A.\cos A) = R^2\left[5 - 2(1+\cos 2A) + 2\sin 2A\right]$$

$$\boxed{OF^2 = R^2\left[3 - 2\sqrt{2}\cos\left(2A + \frac{\pi}{4}\right)\right]}.$$

On démontre, de façon analogue : $OH^2 = R^2\left[3 - 2\sqrt{2}\cos\left(2B + \frac{\pi}{4}\right)\right]$ et $OD^2 = R^2\left[3 - 2\sqrt{2}\cos\left(2C + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

Pour que les 6 points D, E. F, G. H, I soient cocycliques, il faut et il suffit que OF = OH = OD, ce qui équivaut à : $\cos\left(2A + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2B + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2C + \frac{\pi}{4}\right)$.

Ou, en tenant compte des relations $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ et $A + B + C = \pi$:

$$\cos\left(2A + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2B + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2(A + B)\right)$$

a) $\cos\left(2A + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2B + \frac{\pi}{4}\right)$ nous conduit à $\left(2A = 2B \text{ (mod. } 2\pi) \text{ ou } 2A + 2B = -\frac{\pi}{2} \text{ (mod. } 2\pi)\right)$,

c'est-à-dire à $\boxed{(A = B) \text{ ou } (A + B = \frac{3\pi}{4})\ (1)}$;

b) de même, $\cos\left(2B + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2(A + B)\right)$ nous conduit à $\boxed{(A + 2B = \pi) \text{ ou } (A = \frac{\pi}{4})\ (2)}$.

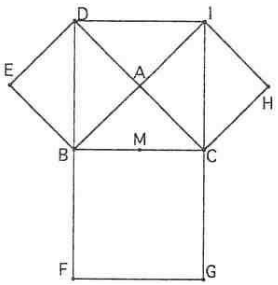
Le système (1) (2) conduit alors à 4 possibilités :

- soit $A = B = \frac{\pi}{3}$ (le triangle ABC est alors équilatéral),
- soit $A = B = \frac{\pi}{4}$ (ABC est alors rectangle isocèle de sommet C),
- soit $A = \frac{\pi}{2}$ et $B = \frac{\pi}{4}$ (ABC est alors rectangle isocèle de sommet A),

- soit $A = \frac{\pi}{4}$ et $B = \frac{\pi}{2}$ (ABC est alors rectangle isocèle de sommet B).

Conclusion : les points D, E, F, G, H, I sont cocycliques si et seulement si le triangle ABC est équilatéral ou rectangle isocèle.

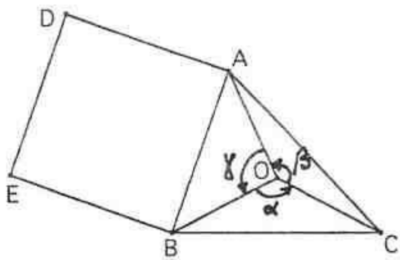
Remarque : dans le cas où le triangle ABC est équilatéral, il est immédiat que les points D, E, F, G, H, I sont cocycliques.
Le cas où le triangle ABC est rectangle isocèle (*cf. figure*) est moins évident a priori.
Supposons par exemple ABC rectangle isocèle de sommet A



Alors :

- le centre du cercle circonscrit à ABC est le milieu M de [BC] ;
- BCID est un carré de centre A, d'où $MD = MI = \frac{a\sqrt{5}}{2}$;
- Par symétrie par rapport à (BC) on a aussi $MF = MG = \frac{a\sqrt{5}}{2}$;
- Enfin on obtient aisément $ME = MH = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Seconde école : Le plan complexe est orienté de façon que le triangle ABC soit direct (*cf. figure*).



On note α, β, γ les mesures respectives de (OB, OC), (OC, OA), (OA, OB), avec $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ et $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Plaçons-nous dans le repère polaire $(O ; OA)$.

On a alors A (1) et $B\left(e^{i\gamma}\right)$.

D'autre part, on a $z_D - 1 = -i\left(e^{i\gamma} - 1\right)$, d'où $z_D = (1 + \sin\gamma) + i(1 - \cos\gamma)$.

On en déduit : $OD^2 = (1+\sin\gamma)^2 + (1-\cos\gamma)^2 = 3 + 2\sin\gamma - 2\cos\gamma = 3 - 2\sqrt{2}\cos\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right)$.

Et, de même, on obtiendra : $OF^2 = 3 - 2\sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ et $OH^2 = 3 - 2\sqrt{2}\cos\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right)$.

On continue ensuite comme dans la première solution.