Solution du problème précédent (n°45)

Enoncé proposé par Bernard PARZYSZ

MATHEMATIQUES DU CITOYEN

Extrait du catalogue décembre-janvier 1996 de la chaîne CAMARA (photo-vidéo-son) :

Payez en 10 fois tous vos achats à partir de 1 000 f pour un coût de **crédit de 4 %** de la valeur d'achat.
CAMARA vous propose pour tous vos achats à partir de 1 000 F le paiement en 10 fois plus un apport personnel équivalent au coût du crédit (...).
TEG 9 % [*] hors assurances facultatives. Le montant du crédit est égal au prix de vente moins l'apport personnel (...).

Exemple : Montant de l'achat 3 000 F. Apport personnel 4% soit 120 F + 10 mensualités de 300 F. Montant du crédit : 2 880 F. Coût du crédit hors assurances facultatives : 120 F. Soit un coût total de l'achat à crédit de 3 120 F.

Question 1 : dans les conditions décrites ci-dessus (TEG de 9 %, apport initial égal au coût du crédit, paiement en 10 mensualités), le coût du crédit est-il bien égal à 4 % de la valeur de l'achat ?

Question 2 : Le problème peut-il se généraliser (apport initial quelconque, TEG quelconque, nombre de mensualités quelconque,...) ?

[*] N.B. le TEG (Taux Effectif Global) est, **par définition**, égal à 12 fois le taux mensuel du crédit. Ce n'est donc **pas** le taux annuel. Cette "entourloupe légale" est spécifique à la France.

Nous n'avons reçu que deux solutions ce trimestre, émanant de Richard ANDRÉ-JEANNIN (54 Longwy) et de Jacques VERDIER (54 Tomblaine). Les matheux seraient-ils tant éloignés des questions d'argent ?
Quoi qu'il en soit, nous allons - à l'instar de nos deux correspondants - traiter le cas général, avec les données suivantes :

- A : montant de l'achat
- I : montant de l'apport initial
- C : somme sur laquelle porte le crédit (on a, bien sûr, $C = A - I$)
- M : montant de chaque mensualité
- T : taux d'intérêt mensuel
- N : nombre de mensualités (le coût du crédit est donc $c = nM - C$).

Proposons-nous d'abord de calculer le montant du crédit. Ici, les deux solutions reçues sont différentes (non dans leur résultat, mais dans leu démarche). En effet, l'une prend en quelque sorte le point de vue de l'acheteur, tandis que l'autre se met à la place du vendeur.

1) Point de vue de l'acheteur :

- au bout d'un mois (après versement de la première mensualité), la somme restant due par l'acheteur est $C(1+t)-M$;

- au bout de deux mois elle est de $\left[C(1+t)-M\right](1+t)-M$, soit $C(1+t)^2-M[1+(1+t)]$

- au bout de n mois, elle est égale à $C(1+t)^n - M\sum_{k=0}^{n-1}(1+t)^k$ (par récurrence),

soit $C(1+t)^n - M\dfrac{(1+t)^n-1}{t}$.

Puisqu'au bout de n mois la dette est éteinte, l'expression précédente est nulle,

d'où $C=\dfrac{M}{t}\left[1-(1+t)^{-n}\right]$.

Le coût du crédit est donc : $\boxed{c = nM € \quad = \dfrac{M}{t}\left[nt-1+(1+t)^{-n}\right]}$

2) Le point de vue du vendeur :

Pour le vendeur, l'emprunt est un placement qui lui rapportera une somme M à la fin de chacune des n mensualités. Or, pour recevoir une somme M dans k mois, au taux mensuel t, il faut placer aujourd'hui la somme $M(1+t)^{-k}$. Tout se passe donc comme si le vendeur plaçait au total le capital $K = M\sum_{k=1}^{n}(1+t)^{-k}$,

soit $K=\dfrac{M}{t}\left[1-(1+t)^{-n}\right]$. Le coût du crédit est donc $c = nM - K$, et in retrouve la même expression que plus haut.

<u>L'apport initial</u> :

Comme on veut que l'apport initial soit égal au coût du crédit, on a

$\boxed{I=\dfrac{M}{t}\left[nt-1+(1+t)^{-n}\right]}$

Dans l'exemple numérique, on a $M = 300$, $n = 10$, $t = \frac{0,09}{12} = 0,0075$ d'où $I \approx 1203,13$; c'est, à 13 centimes près, la somme demandée dans le prospectus.

Remarques :

1. Pour obtenir sans calculatrice la valeur de *I*, on peut, fait remarquer R André-Jeannin, utiliser un développement limité.

D'où : $$I = Mt\frac{nt-1+1-C_n^1 t+C_{n+1}^2 t^2-C_{n+2}^3 t^3+o(t^3)}{t}$$ ou encore $$I = Mt\frac{n(n+1)}{2}\left[1-\frac{n+2}{3}t+o(t)\right].$$

Dans l'exemple numérique, on obtient ainsi $I \approx 120,04$, soit un écart de 4 centimes.

2. J. Verdier donne le tableau d'amortissement ci-dessous :

T.E.G. = 9,00%
I = 0,75%
Taux. Ann. = 9,3807%

NB. Périodes : 10
Achat : 3 000,00 FRF
Apport : 120,00 FRF

	Capital	Amortissement	Intérêt	Remboursement
1	2880,00	278,41	21,60	300,01
2	2604,59	280,50	19,51	300,01
3	2321,09	282,60	17,41	300,01
4	2038,48	284,72	15,29	300,01
5	1753,76	286,86	13,15	300,01
6	1466,90	289,01	11,00	300,01
7	1177,88	291,18	8,83	300,01
8	886,71	293,36	6,65	300,01
9	593,34	295,56	4,45	300,01
10	297,78	297,78	2,23	300,01

TOTAUX	2880,00	120,13	3000,13

Il remarque que « la chaîne vous fait un cadeau de 13 centimes » et indique que « pour tomber juste, il aurait fallu prendre un TEG d'environ 8,99 % », ce qui conduit au tableau de la page suivante :

T.E.G. =	8,99%	NB. Périodes :	10
I =	0,7492%	Achat :	3 000,00 FRF
Taux. Ann. =	9,3699%	Apport :	120,00 FRF

	Capital	Amortissement	Intérêt	Remboursement
1	2880,00	278,42	21,58	300,00
2	2601,58	280,51	19,49	300,00
3	2312,07	282,61	17,39	300,00
4	2038,46	284,73	12,27	300,00
5	1753,73	286,86	13,14	300,00
6	1466,87	289,01	10,99	300,00
7	1177,86	291,18	8,82	300,00
8	886,68	293,36	6,64	300,00
9	593,32	295,55	4,44	300,00
10	297,77	297,77	2,23	300,00

TOTAUX	2880,00	120,00	3000

AVIS DE RECHERCHE

Le *"Groupe de Recherche sur l'Histoire des Mathématiques et de leur Enseignement"* de l'IREM de Lorraine recherche des collègues intéressés par l'un des deux thèmes suivants, prévus pour 1996-97 :

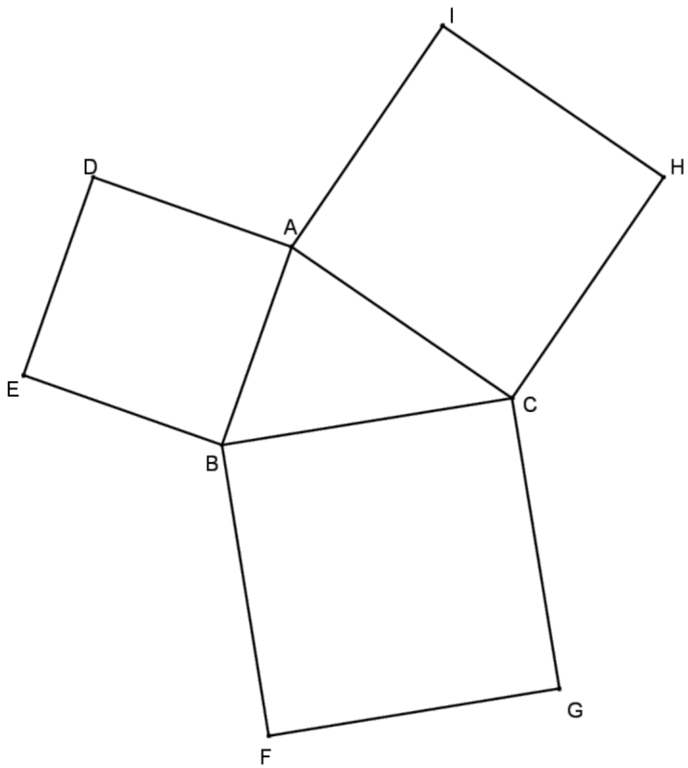
- Etude de textes historiques relatifs aux probabilités (Huygens, Bernoulli, Condorcet, Laplace, etc.)
- Etude du concept de fonction dans l'enseignement secondaire depuis le début du 20e siècle.

Le groupe se réunira **une fois par mois, le vendredi après-midi,** à l'IREM. Réunion de rentrée le 20 septembre 1996. Pour tous renseignements, contacter :

Bernard Parzysz
IREM Université Nancy I
BP 239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex
Tél. 87 31 52 92 (bureau) et 87 75 19 26 (domicile)

Problème du trimestre n° 46
d'après un énoncé du Concours général 1996

Soit un triangle ABC.
Extérieurement à ce triangle, on construit les trois carrés ABED, BCGF et CAIH.
Il est évident que si ABC est un triangle équilatéral, les six points DEFGHI sont cocycliques.
Mais est-il possible que ces six points soient cocycliques sans que le triangle ABC soit équilatéral ?



Envoyer vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à Bernard PARZYSZ, 3 rue Marie Sautet, 57000 METZ.