problèmes et solutions

Commentaires sur la solution du problème n°42
proposé par Bernard PARZYSZ

Rappel de l'énoncé :

Un hebdomadaire organise un concours selon le principe suivant : une question est posée aux lecteurs ; il s'agit pour les participants d'inscrire la réponse sur une carte postale, et de l'envoyer au siège de la revue.
Le règlement précise que le gagnant au concours sera "la personne dont la carte aura été tirée au hasard parmi celles portant une bonne réponse".

Cependant, afin de s'épargner la fastidieuse tâche de trier préalablement les bonnes réponses des mauvaises, les organisateurs décident d'utiliser la procédure suivante : on tire au hasard une carte parmi **toutes** les cartes reçues ; si cette carte indique la bonne réponse, son expéditeur est déclaré gagnant du concours ; sinon, on opère des tirages successifs (sans remise) d'une carte, jusqu'à obtention d'une bonne réponse.

Blaise, qui a envoyé une carte portant la bonne réponse, se demande si cette procédure ne le désavantage pas par rapport à celle qui figure dans le règlement initial.

Qu'en pensez-vous ?

Des solutions de ce problème ont été proposées par des lecteurs, et commentées par Bernard PARZYSZ dans le n°43.

Dans notre précédent bulletin (n°44, décembre 1995), une certaine Gilberte PASCAL (toujours non identifiée) commentait ces commentaires, et Michel HENRY, de l'IREM de BESANCON, commentait sa lettre.

Le "feuilleton" continue, puisque Bernard PARZYSZ répond à Michel HENRY.

Trouvant que cet échange de courrier (qui nous rappelle les échanges épistolaires entre PASCAL et FERMAT) était fort instructif, puisqu'il abordait les questions de fond relatives aux concepts sous-jacents dans les probabilités (et nous permettait donc de comprendre les difficultés des élèves à ce sujet), nous avons décidé de publier cette lettre :

Michel,

Ceci constitue, pour ainsi dire, une réponse à ta réponse à la réponse de "Gilberte Pascal".

Comme vous l'avez remarqué, Gilberte et toi, le problème que j'avais proposé était totalement piégé. Mais je n'avais pas prévu - tout au moins dans la rubrique - de commenter les réponses proposées par les collègues, et ceci principalement pour deux raisons : la première - peut-être pas fondamentale mais en soi suffisante - étant que, comme toujours, je m'y étais pris au dernier moment pour rédiger mon texte, et la seconde étant que, par principe, je considère la rubrique "Problèmes" du Petit Vert comme l'œuvre – collective - des lecteurs qui lui adressent des solutions, et non pas un lieu où je puisse développer mes propres idées (il y a d'autres lieux pour cela). C'est pourquoi je tâche de m'effacer autant que faire se peut, me contentant d'effectuer une synthèse, que j'espère fidèle, des réponses reçues).

Néanmoins, la lettre de Gilberte et ta réponse ont levé le lièvre, et ce n'est pas plus mal : peut-être pourrons-nous faire un peu avancer le schmilblick ?

Venons-en donc au sujet du débat : si je te suis bien, tu distingues 3 niveaux (hiérarchisés) de description de la situation proposée. Je vais donc reprendre ces niveaux, et t'en proposer ma propre "lecture" qui, me semble-t-il, diffère parfois un peu de la tienne:

- le ***niveau 0*** serait celui du "concret", de la "réalité" : on a des "cartes postales en noir et en couleur" (comme chantait Montand), aux sujets divers, de dimensions variées, apportées plusieurs jours durant au siège du journal dans un certain nombre de sacs postaux, etc. Diverses procédures d'obtention de la carte gagnante sont possibles (et, faute d'information, a priori toutes envisageables). Par exemple : choisir un des sacs postaux (comment?), l'ouvrir, plonger la main dedans sans regarder et extraire une carte (après avoir ou non mélangé le contenu du sac). Ou encore : déverser le contenu de tous les sacs en un grand tas, fermer les yeux et piocher une carte. Ou encore : trier toutes les cartes reçues pour ne garder que celles portant la bonne réponse, puis utiliser la procédure précédente. Ou encore...
A ce niveau, on n'a évidemment pas les moyens de dire quelque chose d'intéressant relativement à la question posée ; on peut tout juste émettre une opinion, éventuellement la défendre en utilisant le "bon sens" (celui de la sagesse populaire, qui dit aussi bien "à père avare, fils prodigue" que "tel père, tel fils"), mais sans plus.

- le ***niveau 1*** serait celui des objets idéaux chers à Platon, dans lequel les cartes postales, toutes rassemblées dans un même sac, sont *supposées* (c'est donc une hypothèse) "indiscernables au toucher" (comme disent les manuels). Le point de

vue d'A. Viricel, comme tu le fais remarquer, se situe à ce niveau ; on peut dire qu'il suppose (mais de façon bien sûr implicite) que chaque carte a la même chance d'être tirée. Nous sommes bien ici dans un modèle de type "prékolmogorovien", celui de la "géométrie du hasard" utilisé par les probabilistes du 17e au 19e siècle. Ce niveau permet de fournir des réponses précises et argumentées aux problèmes que l'on se pose, mais il n'y a pas encore de véritable théorie axiomatique globale au sein de laquelle on puisse se placer.
Il a néanmoins, historiquement, fourni des résultats importants en probabilités.

Dans le cas de la solution d'A. Viricel, il y a, à deux reprises, passage d'une procédure à un modèle :
1° la procédure consistant à rassembler les n bonnes cartes, puis à extraire l'une de ces cartes (*niveau 0*), est modélisée en considérant l'ensemble des bonnes cartes, dans lequel chaque carte à la même probabilité d'être tirée (*niveau 1*) ;
2° la procédure consistant à rassembler les N cartes reçues, puis à procéder à des tirages successifs d'une carte jusqu'à obtention d'une bonne carte (*niveau 0*), est interprétée comme signifiant que les mauvaises cartes ne comptent pas, puis modélisée ... par le même modèle que le précédent (*niveau 1*). D'où, évidemment, l'identité des réponses obtenues à la question posée.
Le problème, à mon avis, réside donc ici dans le passage du niveau 0 au niveau 1 : *à deux procédures différentes on fait correspondre un seul et même modèle*, ce qui a pour conséquence que la question initialement posée n'a plus de raison d'être, et entraîne la tautologie constatée.

- ***le niveau 2*** serait celui de la mathématisation, conduisant en particulier à définir un espace probabilisé à partir de l'expérience "concrète" considérée au niveau 0.
Dans l'exemple qui nous occupe, on *peut* associer :
1° à la première des deux procédures ci-dessus, l'univers Ω_1 constitué par l'ensemble des n bonnes cartes : $\Omega_1 = \left\{ \omega_i \middle| i \in \{1,....,n\} \right\}$, avec comme probabilité P_1 l'équiprobabilité. Appelant ω_1 la carte de Blaise et A l'événement "Blaise gagne", on a A = $\{\omega_1\}$, et la probabilité que Blaise gagne est alors $P_1(A) = \frac{1}{n}$.
2° à la seconde de ces deux procédures, l'univers Ω_2 constitué par l'ensemble des (N-n+1)-arrangements de cartes (distinctes) reçues (puisqu'il y a au maximum N-n+1 tirages), univers du type de celui envisagé par Fermat dans sa correspondance avec Pascal au sujet du problème des partis, dans lequel on imagine que l'on continue à tirer des cartes même après l'obtention d'une bonne carte. Dans ce cas aussi, on prend comme probabilité P_2 l'équiprobabilité.
En notant B_k l'événement "Blaise gagne au k^e tirage", on a :

$A = \bigcup_{k=1}^{N-n+1} B_k$, et le calcul de $Card(A) = \sum_{k=1}^{N-n+1} Card(B_k)$ conduit à P(A) = \F(Card(A)) ; Card(Ω_2 = \F(1;n)) par des calculs voisins de ceux de J. Verdier.
(N.B. : j'ai choisi sciemment cet univers, de façon à ne pas introduire, contrairement à P. Le Gall et J. Verdier, de probabilités conditionnelles. Notons que ce même espace probabilisé est peut-être (mais on le sait pas) celui qu'ont choisi P. Le Gall aussi bien que J. Verdier; dans ce cas, on peut reprendre leurs solutions en se passant des probabilités conditionnelles, ce qui donnera quelque chose du genre ci-dessus).

Il me semble qu'il s'agit là, au formalisme près, d'une solution qu'auraient pu produire Pascal ou Fermat eux-mêmes, puisqu'elle se réduit en fait à des dénombrements et à la "géométrie du hasard". Et ainsi, plus qu'un passage du niveau 1 au niveau 2, la question me semble être plutôt celle du passage *du niveau 0 à un niveau modélisé*, c'est-à-dire d'une situation "réelle" à un modèle de cette situation, que ce modèle soit complètement formalisé et intégré à une théorie mathématique (*niveau 2*) ou non (*niveau 1*). La formalisation (*niveau 2*) présente l' "avantage" de permettre de faire l'économie du sens des objets manipulés, comme tu le fais justement remarquer (c'est ce qui se passe aussi dans la résolution algébrique de problèmes "concrets") ; mais encore faut-il, après traitement, pouvoir revenir au sens et interpréter le résultat obtenu dans le niveau 0.
D'autre part, je ne partage pas l'avis de Blaise lorsqu'il dit qu' "*il était bien inutile d'aligner des équations pour obtenir ce que l'on avait postulé en permanence*". Car, en réalité, qu'a-t-on postulé ci-dessus?

1° l'équiprobabilité dans Ω_1, et
2° l'équiprobabilité dans Ω_2.

Bien sûr, il y a l'équiprobabilité dans les deux cas, mais il ne me semble pas que l'une de ces deux hypothèses puisse impliquer l'autre, *étant donné qu'il s'agit de deux modèles différents*.

Ce problème est d'ailleurs analogue à celui - plus classique - rencontré à l'occasion de l'étude du schéma d'urne exhaustif, que l'on peut formuler ainsi :
Une urne contient N_1 boules noires et N_2 boules blanches. Quelle est la probabilité d'obtenir k boules noires :

a) à l'issue d'un tirage simultané de n boules?
b) à l'issue de n tirages successifs d'une boule, sans remise?

Bien sûr, notre "culture probabiliste" fait que nous savons que ces deux probabilités sont égales, mais est-ce si évident pour un élève ? Sans doute que non, étant donné que les deux procédures (*niveau 0*) sont totalement différentes.
Il en est de même des modèles canoniquement associés à ces procédures :

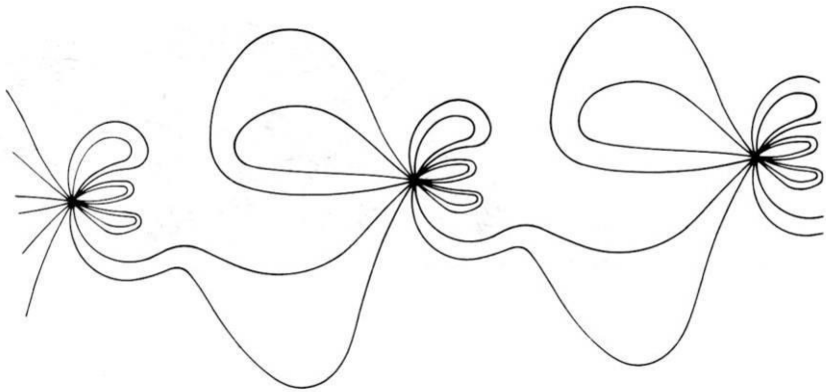
- dans le premier cas: l'univers Ω_1, est l'ensemble des parties de l'ensemble *B* des boules dont le cardinal est égal à *n* ;
- dans le second cas, l'univers Ω_2 est l'ensemble des *n*-arrangements d'éléments de *E* ;
- dans les deux cas, l'univers est muni de l'équiprobabilité.

La considération de la surjection canonique de Ω_1 sur Ω_2 (c'est-à-dire un raisonnement ou un calcul, au niveau des modèles) montre aisément que la probabilité de l'événement "on obtient k boules noires et $n-k$ boules blanches" est la même dans les deux modèles. Mais, n'en déplaise à Blaise, *ceci n'est pas une évidence a priori*.

Le malentendu à propos du problème des cartes postales provient sans doute du fait que *les univers et les hypothèses n'ont pas été explicités* dans l'exposé des solutions de P. Le Gall et de J. Verdier. On retombe ici sur l'aspect didactique que tu évoques vers la fin de ton texte : la nécessité d'expliciter le modèle choisi pour rendre compte de l'expérience aléatoire étudiée, contrairement à ce que préconisent certains manuels qui estiment superflue la détermination explicite de l'univers dans lequel on se propose de travailler.

Que conclure, finalement ? Peut-être que, dans un modèle quel qu'il soit, *on ne peut trouver que ce qu'on y a mis*. Dans le cas présent, on ne peut contester - dans la mesure où les règles de traitement sont utilisées correctement - les résultats obtenus au sein d'un modèle, mais on peut contester le choix fait pour les divers modèles (c'est-à-dire, en fait, leur adéquation aux situations "concrètes" étudiées), ainsi que l'interprétation finale des résultats. Ce qui pose d'ailleurs une question débordant largement le cadre des probabilités (et dont la réponse n'est pas simple) : lorsqu'on fait une conjecture et que le modèle infirme cette conjecture, que peut-on en conclure ? Que la conjecture est fausse, ou que le modèle est inadéquat ?

Bernard



Solution du problème précédent (n°44)

énoncé proposé par J.-Yves HELY, Lycée J.Macé de RENNES.

A l'intérieur d'un billard circulaire, on place une bille en un point A distinct du centre O.
Construire le trajet ABCA que doit suivre la bille pour qu'après deux réflexions successives sur la bande elle repasse par A.
Calculer la longueur de la trajectoire en fonction du rayon et de la distance OA = a.

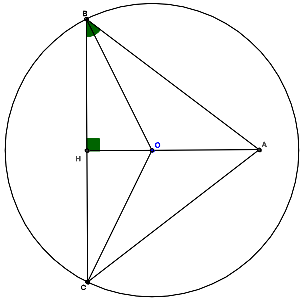
Signalons tout d'abord une réponse tardive (et correcte) au problème n°43, ayant pour auteur Denis PEpIN (55 Verdun).
En ce qui concerne le problème 44, nous avons reçu six solutions, émanant de Rachid Al-HAZEN (75 Paris) Philippe CABASSON (57 Schoeneck), Geneviève D'ANDREA (57 Hettange-Grande), Jean-Yves HELY (35 Rennes), Jacques VERDIER (54 Tomblaine) et André VIRICEL (54 Villers-lès-Nancy).
(Monsieur Rachid AI Hazen (cf. en-tête de sa lettre ci-contre) se présente comme Président de la F.U.B.C. (Fédération Unifiée de Billard Circulaire). C'est sans doute un lointain descendant de son homonyme mathématicien Ibn al-Haytham al-Hazen (Bassora 965 - Le Caire 1039), inventeur - étrange coïncidence - du problème du billard circulaire[1] . Mais peut-être est-ce également un lointain descendant de Gilberte Pascal[2] ?)

Voici une synthèse des réponses reçues. On peut distinguer quatre parties (présentes ou non) dans les démonstrations proposées : le triangle ABC est isocèle en A ; la détermination de la position des points B et C sur le cercle ; la détermination de la longueur de la trajectoire ; la construction de B et C à la règle et au compas.

[1] Curieux homme, d'ailleurs, que celui-là. S'étant vanté auprès du calife du Caire de pouvoir construire une machine capable de régulariser le cours du Nil et avant malheureusement échoué, il dut simuler la folie pour échapper à la colère du souverain. Il a publié maints ouvrages de mathématiques, astronomie, médecine, physique... C'est dans son Optique (publiée à Bâle en 1572) qu'il décrit les lois de la réflexion, ainsi que le problème ici traité ; ce même ouvrage contient également la première description correcte de l'œil.

[2] Voir PB42

Première partie : le triangle ABC est isocèle en A



D'après la réflexion, on a $ABO = OBC$ d'une part et $ACO = OCB$ d'autre part (*voir figure*).
Comme de plus le triangle OBC est isocèle, on a $OBC = OCB$ d'où l'on déduit $ABO = OBC = ACO = OCB$.

Soit, finalement, $ABO + OBC = ACO + OCB$, c'est-à-dire $ABC = OCB$.

Deuxième partie : détermination de la position des points B et C sur le cercle

Remarquons tout d'abord que l'on peut toujours supposer le rayon du cercle égal à 1. Plusieurs méthodes on été utilisées par les collègues qui nous ont écrit.

Méthode 1

Ph. Cabasson remarque que le point O, intersection des deux bissectrices intérieures du triangle ABC, est le centre du cercle inscrit dans ce triangle, donc qu'il est équidistant des côtés [AB] et [AC]. Ce qui se traduit (en posant $OA = a$ et $OBC = \alpha$) par $\sin\alpha = a\cos(2\alpha)$. En remplaçant ensuite $\cos(2\alpha)$ par $1 - 2\sin^2\alpha$ et en posant $x = \sin\alpha$, on obtient l'équation $2ax^2 + x - a = 0$. Cette équation admet une unique solution comprise entre -1et 1 :

$x = \dfrac{\sqrt{1+8a^2} - 1}{4a}$. On obtient finalement $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{1+8a^2} - 1}{4a}$, ce qui permet de déterminer α, donc les points B et C.

Méthode 2

G. D'Andréa utilise un plan complexe d'origine O, tel que l'affixe a de A soit réelle et positive. En posant $\theta = (OA, OB)$ on a alors $B(e^{i\theta})$ et $C(e^{-i\theta})$.

L'égalité $\sin(BC, BO) = \sin(BO, BA)$ s'écrit aussi : $\dfrac{\text{dét}(BC, BO)}{BC.BO} = \dfrac{\text{dét}(BO, BA)}{BO.BA}$.

Comme on a $BC\begin{pmatrix}0\\ -2\sin\theta\end{pmatrix}$, $BO\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}$ et $BA\begin{pmatrix}a-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}$, il vient

$\sqrt{a^2 - 2a\cos\theta + 1} = -a\tan\theta$

(on remarque que cette relation implique $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{2}; \pi\right[$ donc $\cos\theta < 0$).

Après élévation au carré et en posant $x = \cos\theta$, on obtient l'équation $2ax^3 - (1+2a^2)x^2 + a^2 = 0$.

Cette équation peut s'écrire $(x-a)(2ax^2 + a^2) = 0$, d'où les trois solutions :

$x_1 = a$, $x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{1+8a^2}}{4a}$, $x_3 = \dfrac{1 + \sqrt{1+8a^2}}{4a}$.

La seule solution négative est x_2, d'où finalement $\cos\theta = \dfrac{1-\sqrt{1+8a^2}}{4a}$.

N.B. Par rapport à la méthode 1, on a $\theta = \alpha + \dfrac{\pi}{2}$, d'où cos θ = -sin α, ce qui correspond bien aux résultats trouvés.

Méthode 3

J. Verdier utilise la propriété qu'a une bissectrice intérieure d'un triangle de diviser le côté opposé proportionnellement aux côtés adjacents, soit, en appelant H le milieu de [BC] : $\dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{BH}} = \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{AB}}$. Ceci, joint aux relations $AB^2 = (OH + a)^2 + BH^2$, et $BH^2 + OH^2 = 1$ (Pythagore), fournit un système de trois équations à trois inconnues qu'il laisse à… ***Dérive*** le soin de résoudre.

Il signale à ce propos que :

1° Sur TI92, le logiciel refuse de résoudre ;

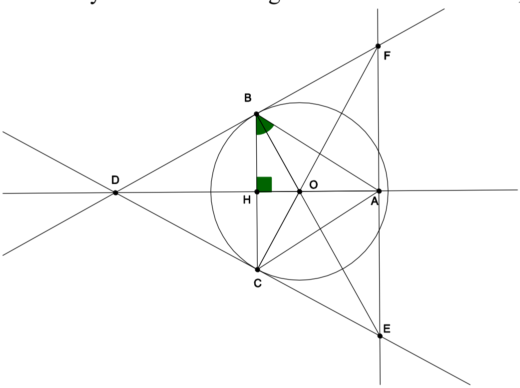
2° Sur ordinateur, *Dérive* donne quatre solutions pour OH : a , $\dfrac{1}{0^+}$, $\dfrac{\sqrt{1+8a^2}-1}{4a}$, $\dfrac{\sqrt{1+8a^2}+1}{4a}$ dont seule la troisième convient.

Méthode 4

En posant $\alpha = \mathrm{OBH}\ (= \mathrm{OBA})$, en écrivant $\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{BH}} \\ \tan(2\alpha) = \dfrac{\mathrm{a}+\mathrm{OH}}{\mathrm{BH}} \end{cases}$ et en exprimant tan(2α) en fonction de tan α, J. Verdier obtient cette fois l'équation $\mathrm{a}+\mathrm{OH} = \dfrac{2\mathrm{OH}}{1-\dfrac{\mathrm{OH}^2}{1-\mathrm{OH}^2}}$ qu'il confie derechef à *Dérive* sur TI92, avec succès cette fois.

Méthode 5

J.-Y. Hély considère les tangentes au cercle en B et C, qui se rencontrent en D et coupent la perpendiculaire en A à (OA) et F et E respectivement :



a) il démontre d'abords l'*alignement* des points B, O et E :

Le quadrilatère convexe AOBF est inscriptible (triangles rectangles de même hypoténuses) donc $(\mathrm{BO},\mathrm{BA}) = (\mathrm{FO},\mathrm{FA})$.

D'autre part $(\mathrm{FO}, \mathrm{FA}) = (\mathrm{EA}, \mathrm{EO})$[symétri e par rapport à (OA)], et on a vu que $(BO,BA)=(BC,BO)$ [bissectrice] ; d'où $(BC,BO)=(EA,EO)$ et $(BO,EO)=(BC,EA)$. Puisque les vecteurs BC et EA sont colinéaires et de sens contraire, il en est de même pour BO et EO. Les points B, O et E sont donc alignés (il en résulte que O est l'orthocentre du triangle DEF).

b) J.-Y. H détermine ensuite la *distance* OE (ce qui détermine la position de E). On a EO.EB = EA.EF (puissance de E par rapport au cercle circonscrit à AOBF), soit, en posant X= EO : $X(X+1) = 2EA^2 = 2(X^2-a^2)$.

la solution positive de cette équation est $X=\dfrac{1+\sqrt{1+8a^2}}{4a}$.

N.B Comme $\dfrac{OH}{OB}=\dfrac{OB}{OE}$, on en déduit que $OH=\dfrac{a}{X}$, c'est-à-dire $X=\dfrac{\sqrt{1+8a^2}-1}{4a}$:

il s'agit donc bien de la même solution que cette obtenue par les méthodes précédentes.

Méthode 6

A.Viricel remarque que le faisceau (B ; AHOD) est harmonique (deux droites et leurs bissectrices).

On a donc $\dfrac{2}{\overline{OD}}=\dfrac{1}{\overline{OA}}+\dfrac{1}{\overline{OH}}$. D'autre part, dans le triangle rectangle OBD, $\overline{OH}.\overline{OD}=OB^2=1$.

D'où (en posant $x=\overline{OH}$) $\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}$, c'est-à-dire $2ax^2+x-a=0$, équation déjà rencontrée dans la méthode 1.

Troisième partie : détermination de la longueur de la trajectoire

Une fois précisée la position des points B et C, le calcul de la longueur de la trajectoire n'est plus qu'une question de formalité ; les formules données parles auteurs des solutions sont les suivantes (par ordre alphabétique) :

Ph. Cabasson : $\dfrac{1}{4a}\left(\sqrt{1+8a^2}+3\right)^{3/2}\left(\sqrt{1+8a^2}-1\right)^{1/2}$

G. D'Andréa : $\sqrt{4a^2+2+2\sqrt{1+8a^2}}+\dfrac{1}{2a}\sqrt{8a^2-2+2\sqrt{1+8a^2}}$

J.-Y. Hély : $\dfrac{1}{4a^2}\sqrt{4a^2+2+2\sqrt{1+8a^2}}\left(4a^2-1+\sqrt{1+8a^2}\right)$

J. Verdier (TI92) : $\dfrac{\left(\sqrt{1+8a^2}+4a^2-1\right)}{a\sqrt{2}\left(\sqrt{1+8a^2}-1\right)}$

A. Viricel : $\dfrac{1}{a\sqrt{2}}\left[2\sqrt{\sqrt{1+8a^2}-1+4a^2}+\sqrt{8a^4+\sqrt{1+8a^2}-1-4a^2}\right]$

N.B. je laisse au lecteur le soin de vérifier que ces longueurs sont bien égales : j'avoue humblement ne pas en avoir eu le courage. Je me suis simplement contenté de vérifier que pour a = 1 les diverses formules donnaient bien la valeur attendue, à savoir $3\sqrt{3}$ *(car le triangle ABC est alors équilatéral).*

Quatrième partie : construction de B et C à la règle et au compas

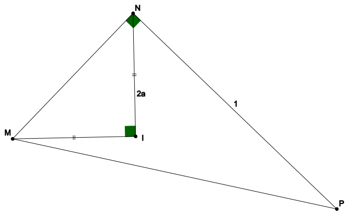
A la règle et au compas, il s'agit de placer le point H sur (OA).

Comme on a $OH = \dfrac{\sqrt{1+8a^2}-1}{4a}$, le problème se ramène à :

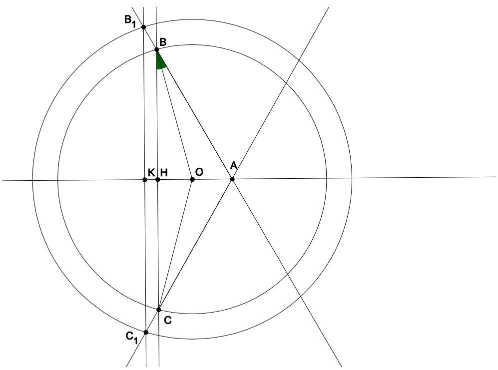
- construire un segment de longueur $\sqrt{1+8a^2}-1$
- diviser ce segment par 4a.

Plusieurs solutions ont été proposées.

Méthode 1 (G. d'Andréa)



Elle construit un segment [MP] de longueur $\sqrt{1+8a^2}$ (voir *figure 1*, dans laquelle IM = IN = 2a et NP = 1) ; on reporte le segment selon EK (voir *figure 2*), d'où $OK = \sqrt{1+8a^2}-1$



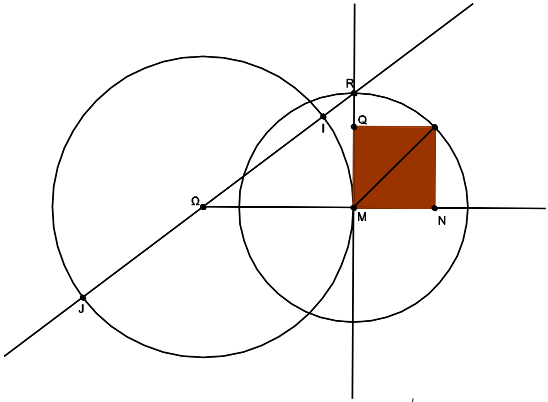
Elle trace alors le cercle de centre O et de rayon 4a ; la perpendiculaire en K à (OA) coupe ce cercle en B_1 et C_1.
Le segment $(OB_1]$ (resp. $(OC_1]$) coupe le cercle donné en B (resp. C) : on a en effet $\dfrac{OH}{OK} = \dfrac{OB}{OB_1} = \dfrac{1}{4a}$.

Méthode 2 (J.-Y. Hély)

Voir méthode 5 ci-dessus. Il part de l'équation $X(X+1) = 2(X^2-a^2)$, qu'il réécrit $X(X-1) = 2a^2$.

Pour obtenir un segment de longueur X :

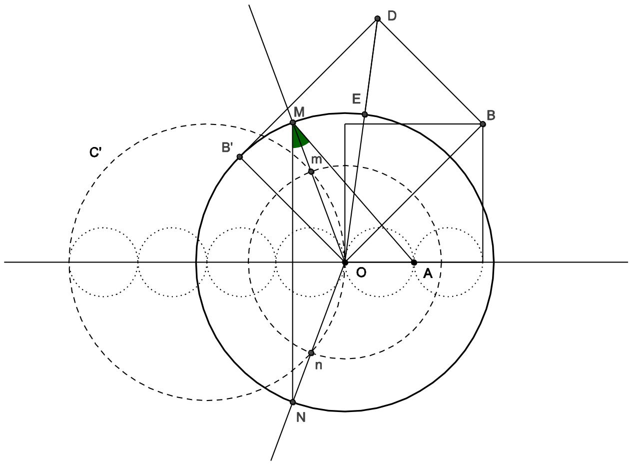
- il trace un cercle de centre Ω et de rayon 1/2 et, à partir d'un point M de ce cercle, construit un carré MNPQ de côté a, extérieurement au cercle (avec N sur [ΩM]) :



- il rabat P en R sur (MQ) : on a donc MR = MP = a√2
- il trace (ΩR), qui coupe le cercle en I et J. D'où (puissance de R par rapport au cercle) : $RM^2 = \overline{RI}.\overline{RJ}$ et, comme RI = RJ - 1, le segment [RI] a la longueur cherchée.

Méthode 3 (Rachid al-Hazen)

Voici sa construction (*citation de l'auteur*) : « On trace six cercles de diamètre OA afin de permettre de tracer un carré de côté 2OA d'un côté de O et un cercle C' de diamètre 4OA de l'autre côté. On trace la diagonale [OB] du carré et un rayon [OB'] du billard, qui lui est perpendiculaire. On considère la diagonale [OD] du rectangle construit sur ces deux segments.



On trace le cercle de centre O et de rayon le segment [ED] obtenu en enlevant un rayon du billard à la diagonale [ED]. Ce dernier cercle coupe le cercle C' en deux points m et n. On trace les rayons passant par ces deux points ; les points d'intersection M et N de ces rayons avec le bord du billard sont les points qu'il faut viser depuis le point afin d'avoir la trajectoire triangulaire souhaitée ».

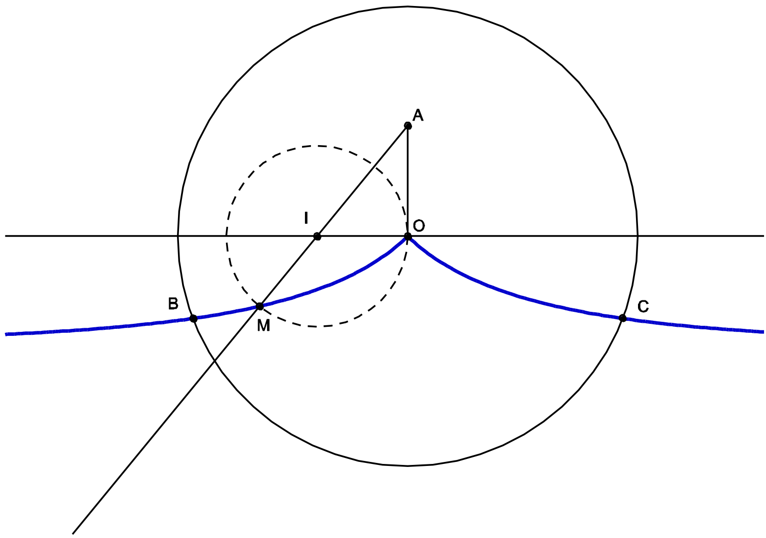
N.B. Le lecteur pourra vérifier, en calculant $\cos \mathrm{AOM}$, qu'il correspond bien à la valeur trouvée dans la seconde partie. Rachid al-Hazen ne le fait pas car, dit-il « *la place me manque sur cette page pour la dérouler convenablement* ». Ne serait-il pas également un cousin éloigné de Pierre de Fermat ?

Notre correspondant signale enfin que « *cette méthode, infaillible, a été interdite pas la fédération internationale au cours de la convention de Delft en 1972, car son usage dénuait la compétition de tout intérêt* ».

Remarque

A. Viricel remarque que [AB] coupe le diamètre Δ perpendiculaire à (OA) en un point I tel que le triangle IOB est isocèle (*voir figure ci-dessous*) : en effet, on a $(\mathrm{BO},\mathrm{OI}) = (\mathrm{BO},\ \mathrm{BC}) = (\mathrm{BA},\mathrm{BO})$.

Soit alors un point I de Δ, et le point M de [AI) défini par AM = AI + IO ; ce point appartient à une strophoïde, de sommet A et de point double O. les points B et C cherchés sont les intersections de cette courbe avec le cercle.



Problème du trimestre n°45
énoncé proposé par Bernard PARZYSZ

MATHEMATIQUES DU CITOYEN

Extrait du catalogue décembre-janvier 1996 de la chaîne CAMARA (photo-vidéo-son) :

Payez en 10 fois tous vos achats à partir de 1 000 f pour un coût de **crédit de 4%** de la valeur d'achat.

CAMARA vous propose pour tous vos achats à partir de 1 000 F le paiement en 10 fois plus un apport personnel équivalent au coût du crédit (...).

TEG 9% [*] hors assurances facultatives. Le montant du crédit est égal au prix de vente moins l'apport personnel (...).

Exemple : Montant de l'achat 3 000 F. Apport personnel 4% soit 120 F + 10 mensualités de 300 F. Montant du crédit : 2 880 F. Coût du crédit hors assurances facultatives : 120 F. Soit un coût total de l'achat à crédit de 3 120 F.

Question 1 : dans les conditions décrites ci-dessus (TEG de 9%, apport initial égal au coût du crédit, paiement en 10 mensualités), le coût du crédit est-il bien égal à 4% de la valeur de l'achat ?

Question 2 : Le problème peut-il se généraliser (apport initial quelconque, TEG quelconque, nombre de mensualités quelconque,...) ?

[*] N.B. le TEG (Taux Effectif Global) est, **par définition**, égal à 12 fois le taux mensuel du crédit. Ce n'est donc **pas** le taux annuel. Cette "entourloupe légale" est spécifique à la France.

Envoyez vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à Bernard PARZYSZ, 3 rue Marie Sautet, 57000 METZ .