Solutions du problème du trimestre n°41
(proposé par Victor Alexeïevitch BUKOWSKI,
Institut de Mathématiques Appliquées, Khabarovsk, Russie)

Soit un triangle ABC de centre de gravité G.

La rotation de centre G et d'angle $+2\pi/3$ transforme B en B'.
La rotation de centre G et d'angle $-2\pi/3$ transforme C en C'.

Démontrer que le triangle AB'C' est équilatéral.

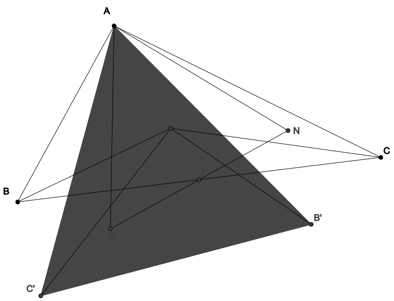
T.S.V.P.

Synthèse proposée par Bernard PARZYSZ

Les solutions reçues pour le problème n° 41 ont pour auteurs Richard BECZKOWSKI (71 Châlon-sur-Saône), Geneviève D'ANDREA (57 HettangeGrande), Jean-Yves HELY (35 Rennes), Laurence JEANNEY (54 Tomblaine), Pol LE GALL (57 Rombas), Christiane ROHMER (88 Neufchâteau), et André VIRICEL (54 Villers-lès-Nancy).

Les réponses proposées sont variées : elles utilisent, soit les transformations, soit le plan complexe, soit la géométrie analytique. Cette diversité d'outils m'a fourni un moyen commode de sérier les solutions.

1- Transformations (R. Beczkowski, C. Rohmer):



Les transformations dont il s'agit sont, bien entendu, des rotations, et le problème revient à montrer, par exemple, que la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme C' en B'.

On peut ainsi (voir figure) utiliser la rotation *r* de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et la symétrie *s* de centre I, milieu de [BC]. La composée $f = r \circ s \circ r$ est une rotation, d'angle $\frac{2\pi}{3} + \pi + \frac{2\pi}{3}$, soit $\frac{\pi}{3}$, qui transforme C' en B' : en effet, on a *r*(C') = C, *s*(C) = B et *r*(B) = B'. De plus, en posant M = *r*(A) et N = *r*(M), le triangle AMN est équilatéral par construction.
On remarque d'autre part que [MN] a pour milieu I : en effet, on a par hypothèse $\mathrm{GI} = -\frac{1}{2}\mathrm{GA}$ et (puisque G est aussi le centre de gravité du triangle AMN) $\mathrm{GA} = -(\mathrm{GM}+\mathrm{GN})$; donc $\mathrm{GI} = \frac{1}{2}(\mathrm{GM}+\mathrm{GN})$.

On en déduit que *r*(A) = M, *s*(M) = N et *r*(N) = A, soit *f*(A) = A, et par conséquent le centre de la rotation *f* est le point A. Finalement, B' est l'image de C' dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Il en résulte que le triangle AB'C' est équilatéral.

2- Nombres complexes (R. Beczkowski, G. D'Andrea, J.-Y. Hély, P. Le Gall, C. Rohmer, A. Viricel):

Comme on le voit, ce type de solution a été proposé par tous les correspondants, ou presque.
Un point quelconque étant désigné par une lettre majuscule, son affixe sera désignée par la lettre minuscule correspondante. On prend G comme origine du plan complexe, d'où $g = 0$.

Par hypothèse, on a $a + b + c = 3g = 0$. De plus, on a aussi $b' = jb$ (avec la notation habituelle : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$), et de même $c = jc'$ (d'où $c' = j^2c$).

On en déduit $c' = j^2c - a = j^2(-a-b) - a = j(b'-a)$ (puisque $1+j+j^2=0$).

C'est-à-dire $c'-a = e^{\frac{i\pi}{3}}(b'-a)$.
Ce qui signifie que C' est l'image de B' dans la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$, donc que le triangle AB'C' est équilatéral (de sens indirect).

3- Géométrie analytique (L. Jeanney):

On considère le repère orthonormal direct d'origine G, tel que A(0 ; 1) et C(c ; d) (c et d réels donnés). Alors on a B($-c$; $-1-d$), puisque
$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Soit B'(x_1 ; y_1) l'image de B par la rotation de centre G et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; on a :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c \\ -1-d \end{pmatrix} \text{ soit } x_1 = \frac{1}{2}\left(c + d\sqrt{3} + \sqrt{3}\right) \text{ et}$$

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(-c\sqrt{3} + d + 1\right).$$

Et de même, en posant C'(x_1 ; y_2) : $x_2 = \dfrac{1}{2}\left(d\sqrt{3} - c\right)$ et $y_2 = -\dfrac{1}{2}\left(c\sqrt{3} + d\right)$.

On en déduit :

$$AB'^2 = \frac{1}{4}\left\{\left(c + d\sqrt{3} + \sqrt{3}\right)^2 + \left(-c\sqrt{3} + d - 1\right)^2\right\} = c^2 + d^2 + c\sqrt{3} + d + 1$$

$$AC'^2 = \frac{1}{4}\left\{\left(d\sqrt{3} - c\right)^2 + \left(c\sqrt{3} + d + 2\right)^2\right\} = c^2 + d^2 + c\sqrt{3} + d + 1$$

$$B'C'^2 = \frac{1}{4}\left\{\left(2c + \sqrt{3}\right)^2 + \left(2d + 1\right)^2\right\} = c^2 + d^2 + c\sqrt{3} + d + 1$$

On a donc bien AB' = AC' = B'C', et le triangle AB'C' est équilatéral.

Pour terminer, remarquons avec A. Viricel que « *le changement du signe des angles de rotation conduit à un deuxième triangle équilatéral* », et que, si l'on appelle A_1 (resp. A_2) le symétrique de A par rapport à (B'C') (resp. (B"C")), les triangles A_1BC et A_2BC sont également équilatéraux. Démontrons-le par exemple pour A_1BC, en utilisant les complexes :

A_1 est l'image de A dans la rotation de centre B' et d'angle $\frac{2\pi}{3}$; on a donc $a_1 - b' = j(a - b')$, d'où :

$$a_1 = ja + (1-j)b' = ja + (1-j)jb = j(a+b) - j^2b = -jc - j^2b$$

On en déduit $a_1 - c = -(1+j)c - j^2b = -j^2(b-c)$, ce qui peut encore s'écrire $a_1 - c = e^{\frac{i\pi}{3}}(b-c)$ et qui montre que A_1 est l'image de B dans la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$, c'est-à-dire que le triangle A_1BC est équilatéral (de sens indirect).

Le problème du trimestre (n°42)

proposé par Bernard PARZYSZ

Un hebdomadaire organise un concours selon le principe suivant : une question est posée aux lecteurs ; il s'agit pour les participants d'inscrire la réponse sur une carte postale, et de l'envoyer au siège de la revue.
Le règlement précise que le gagnant au concours sera "la personne dont la carte aura été tirée au hasard parmi celles portant une bonne réponse".

Cependant, afin de s'épargner la fastidieuse tâche de trier préalablement les bonnes réponses des mauvaises, les organisateurs décident d'utiliser la procédure suivante : on tire au hasard une carte parmi **toutes** les cartes reçues ; si cette carte indique la bonne réponse, son expéditeur est déclaré gagnant du concours ; sinon, on opère des tirages successifs (sans remise) d'une carte, jusqu'à obtention d'une bonne réponse.

Blaise, qui a envoyé une carte portant la bonne réponse, se demande si cette procédure ne le désavantage pas par rapport à celle qui figure dans le règlement initial.

Qu'en pensez-vous ?

Envoyez vos solutions à Bernard PARZYSZ, 3 rue Marie Sautet, 57000-METZ, ainsi que toute proposition de problème pour les numéros à venir.