Solution du problème n°42 de juin 1995 (suite)

En septembre dernier, nous avons proposé trois solutions de lecteurs à ce problème (voir Petit Vert n°43 pages 24 à 26).

Peu de temps après, la rédaction recevait cette lettre d'une certaine Gilberte PASCAL, sœur de Blaise (nous n'avons pas réussi à trouver qui se cachait sous ce pseudonyme). Nous la livrons à votre sagacité :

Mademoiselle Gilberte Pascal
à
Messieurs André, Pol, Jacques et Bernard

Messieurs,

Je ne sais comment vous avez eu connaissance des inquiétudes de mon jeune frère Blaise, mais quelle ne fut pas ma surprise en feuilletant votre petite publication verte datée de septembre, dans la page 24 de laquelle vous vous intéressiez à soli problème. C'est en effet après avoir appris (je ne sais trop comment) que le gagnant au concours organisé par un hebdomadaire serait tiré au sort parmi les bonnes réponses en indiquant la procédure simplifiée que vous rapportez, qu'il a commencé à me demander si cela aurait une influence sur les chances de gagner. N'étant pas versée dans les mathématiques, ni même dans le calcul des probabilités, je ne trouvai guère de raisons susceptibles de le rassurer, si bien que c'est avec un profond soulagement que je me plongeai dans votre contribution sur le sujet, dans l'espoir d'y trouver quelque argument décisif capable d'emporter sa conviction

Autant vous le dire d'emblée : aucun de vos magnifiques raisonnements n'a suffi. La jeunesse est le plus souvent d'un entêtement que les reproches ne sauraient entamer et les raisons les plus fondées n'ont généralement pas de prise sur les esprits qui refusent obstinément de les entendre. Vous le savez d'ailleurs sans doute, puisque vous semblez exercer le dangereux métier de professeur. C'est donc à la seule fin de compléter votre expérience (et de vous éviter pareille mésaventure) que je prends la liberté de vous écrire pour vous conter dans le détail l'échec que j'ai subi en voulant utiliser votre article.

J'ai d'abord cru bien faire en lui rapportant l'explication que vous semble tenir d'un ami logicien : « En réfléchissant bien, lui dis-je en préambule, si l'on tire parmi toutes les cartes, on tire a fortiori parmi les bonnes ». L'impertinent me laissa entendre avec perfidie que je ferais mieux de ranger mon latin raisonnant (peut-être a-t-il même voulu dire 'résonnant', mais je ne saurais l'affirmer) et de revoir mon français ! Pour lui la préposition parmi, qui signifie au milieu de, doit s'entendre dans le sens commun de dans l'ensemble de, avec la seule hypothèse supplémentaire d'équiprobabilité propre à garantir l'équité. En d'autres termes, il a prétendu que tirer parmi les bonnes réponses impliquait bien d'effectuer le tirage dans l'ensemble de toutes les réponses, mais en l'occurrence il serait clair que *l'égalité des chances ne serait pas assurée au même titre pour toutes les réponses. Il est donc impossible pour ces raisons de non-équiprobabilité de considérer que le tirage parmi les bonnes réponses induirait a fortiori un tirage parmi toutes les réponses. Le problème inverse lui parut encore plus clair : effectuer le tirage parmi toutes les réponses n'implique en quelque sens que ce soit le tirage parmi les bonnes réponses. Prétendre le contraire serait tout simplement exprimer qu'il n'y a pas de problème (alors pourquoi le poser ?) ou affirmer que la procédure revient au même pour assurer l'équiprobabilité. C'est en effet de cela qu'il s'agit, mais « affirmation ne vaut pas réponse », m'a-t-il proféré sentencieusement (et j'ai bien eu l'impression qu'il cherchait en cela à imiter son professeur de mathématiques).*

Vous comprendrez, je le pense, que j'ai vite rangé ce premier argument dont je n'ai sans doute pas eu la capacité qui aurait été la vôtre pour le faire valoir. Mais reculant le moment que je craignais le plus de devoir entrer dans les calculs, j'essayai encore le raisonnement non formalisé en essayant de le convaincre que « tout se passait comme si les mauvaises réponses n'existaient pas » puisque « le tirage donnant une mauvaise carte pouvait être considéré comme nul et non avenu ». In ne me laissa même pas terminer ma phrase en me conseillant (comme son professeur le lui avait maintes fois enjoint, dit-il) de supprimer les superlatifs rhétoriques destinés à donner du poids à mon affirmation et de ne lui faire part que des éléments de raisonnement effectifs, seuls susceptibles d'étayer ma conclusion. Je dus battre en retraite, là encore, car je sentait bien que cette façon de voir les choses ne contenait pas le moindre argument et je me surpris à penser moi aussi qu'affirmation ne vaut pas réponse, même si elle est renforcée avec un maximum d'effets oratoires : la réponse devait indéniablement résider dans le « tout se passe comme si », mais, n'étant pas à votre place, je ne disposais pas de l'autorité scientifique suffisante pour m'éviter d'avoir à expliquer véritablement le cheminement déductif complet.

Comme vous vous en doutez, je n'échappai pas à l'obligation, que je redoutais d'avoir à exposer de savants calculs auxquels je ne comprends pas grand chose, mais qui sont cependant propres, si je vous si bien compris, à justifier que la théorie et la modélisation probabiliste ne sont pas « complètement farfelues ». J'avoue toutefois que j'étais tout de même rassérénée, car je m'imaginais que les équations allaient favorablement impressionner le petit Blaise et que cela permettait enfin de clore le débat. Il me laissa faire en m'observant d'un sourire qu'il me faut bien qualifier de supérieur, et je dois reconnaître que si je conserve encore aujourd'hui quelque rancune à propos de ces évènements, c'est essentiellement à cause du malaise que me procure toujours le souvenir de ce sourire goguenard.. Mais laissons-là tous ces sentiments. Une fois les calculs achevés, il alla silencieusement dans la corbeille à papier pour retirer une dizaine de feuilles froissées qu'il déroula devant moi et sur lesquelles je pus apercevoir les mêmes formules que celles dont je venais à peine de me débrouiller péniblement. « Tu peux, comme moi, mettre tous tes calculs à la poubelle : ils sont insensés et ne prouvent rien ! ».

Il m'expliqua ensuite qu'il s'était vite rendu compte que la formulation calculatoire ne rimait à rien puisqu'elle ne faisait que décliner sur des lignes et des lignes de sommations plus originales et plus intéressantes les unes que les autres le double fait que l'on supposait à chaque pas :
1°) que les seuls gagnants possibles étaient choisis parmi les bonnes réponses ;

2°) que la procédure n'introduit aucune différence de statut entre ces différentes bonnes réponses.
Dans ces conditions, ajouta-t-il, il était bien inutile d'aligner les équations pour obtenir ce qu'on avait postulé en permanence : toute bonne réponse aurait inéluctablement une probabilité p telle que n.p = 1 ! Des procédures de tirage d'apparence encore plus farfelues (comme de choisir tout simplement la première ou la dernière, la plus lourde ou la plus légère des bonnes réponses parvenues) donneront le même résultat a partir du moment où l'on n'introduit dans le modèle aucune clause détruisant la symétrie !

Cette remarque me parut pleine de bon sens et je ne pus m'empêcher de glisser avec un certain soulagement qu'il devait désormais être rassuré, puisque les chances de gagner étaient les mêmes dans tous les cas. « Au contraire, me dit-il d'un air espiègle que je ne lui connaissais que trop, il suffit de remarquer que la procédure permet aux plus malins, du moment qu'il n'y a aucune vérification, de compenser à leur avantage l'équiprobabilité des bonnes réponses.. La dernière fois, j'ai envoyé une centaine de cartes à mon nom, et j'espère ainsi avoir sensiblement amélioré mes chances ! ».

Vous conclurez évidemment avec moi que la jeunesse est particulièrement incorrigible ! Et croyez bien, Messieurs, que je plains souvent les pauvres professeurs de mathématiques qui se heurtent chaque jour à la difficulté de transmettre leurs théorèmes et leurs modèles à des garnements qui ne sont pas dignes de les recevoir et bien incapables de les apprécier. J'espère cependant que les ennuis dont j'ai cru bon de vous faim part seront de quelque utilité pour votre réflexion et votre pratique

Votre dévouée,
Gilberte Pascal

A la lecture de cette lettre, Michel HENRY (de l'Université de BESANÇON), grand spécialiste des probabilités s'il en est, a bien voulu nous faire part de quelques commentaires :

Commentaires sur les trois solutions du problème n° 42 proposé par Bernard Parzysz.
Réaction à la lettre de Gilberte Pascal et proposition d'idylle.

Par Michel HENRY, IREM de Besançon

Reprenons les données du problème ; « *Pour participer à un jeu organisé par un hebdomadaire, chaque candidat envoie sa réponses sur une carte postale. Le gagnant sera celui dont la carte sera tirée "au hasard" parmi les bonnes réponses. Revient-il au même de tirer (sans remise) et "au hasard" parmi toutes les cartes reçues jusqu'à obtenir la première carte portant la bonne réponse ?* »,

Une réponse positive mérite-t-elle d'être justifiée ? Comment, avec quels arguments ? Les "démonstrations" d'A. Viricel, P. Le Gall et J. Verdier sont-elles équivalentes ? Répondent-elles aux doutes du jeune Blaise ?

Il semble que non, malgré les explications de sa sœur Gilberte qui ne parvient pas à entamer son scepticisme. Pourquoi ?
Blaise serait-il demeuré à ce point qu'il ne comprenne ni une explication transparente (celle d'A. Viricel), ni un calcul élémentaire (celui de P. Le Gall), ni bien sûr l'application d'une formule de combinatoire (due à l'habileté de J. Verdier) ?
Ses pensées n'iraient-elles pas plutôt au delà des pratiques courantes (du moins en classe) de traitement des problèmes de probabilités, pour poser une question de fond sur le statut des objets mathématiques et finalement sur le Savoir ?
De ce point de vue, à quels niveaux se situent les réponses de nos trois compères ?

Blaise précise (fin du 3ème paragraphe de la lettre de Gilberte) : « *[peut-on] affirmer que la procédure revient au même pour rétablir l'équiprobabilité. C'est en effet de cela qu'il s'agit* ». Bonne question ! comme on dit quand on ne sait pas trop. Mais que veut donc dire Blaise par "rétablir l'équiprobabilité" ?

La réponse d'A. Viricel reste ambiguë : « *tout se passe comme si les mauvaises réponses n'existaient pas*... ». Où cela se passe-t-il donc ?... Dans la réalité concrète où l'on a mis les cartes postales dans un grand sac, que l'on a bien mélangé ? Y a-t-il alors "équiprobabilité" sur l'ensemble des cartes ? Certains en doutent : le mélange est-il parfait ou a-t-il conservé, malgré tout, un certain ordre dans l'empilement des cartes postales ? Et si, comme Blaise, des lecteurs ont envoyé au journal plusieurs réponses sans que cela soit contrôlé ? (on sort alors de la règle du jeu, mais dans la situation concrète y a-t-il un dispositif de contrôle ?).

A ce niveau, que nous appellerons **niveau 0**, la description de l'expérience aléatoire : " tirer une carte au hasard", n'est pas suffisamment fine pour parler de sa reproduction possible un grand nombre de fois (approche fréquentiste), ou pour parler de "géométrie du hasard" dans l'agencement des cartes dans le grand sac.

Manifestement A. Viricel se place au **niveau 1** de la modélisation. « *Tout se passe comme si* » veut dire : supposons une expérience aléatoire idéale que l'on petit décrire en termes pseudo-concrets par le tirage d'une carte d'un grand sac. L'appréciation que je porte sur le déroulement de l'expérience concrète, me permet de faire une hypothèse de modèle. "Les cartes du grand sac sont équiprobables", et je n'ai pas besoin de décrire le dispositif permettant au niveau 0 de le contrôler. En existe-t-il un en réalité ?

Et "tout se passe comme si" prend alors le sens d'une périphrase de niveau 1, mise pour axiome de modèle : l'hypothèse d'équiprobabilité sur l'ensemble des cartes postales, qui fonde le concept même de probabilité et sort fonctionnement dans ce modèle, induit, par principe, l'équiprobabilité sur la partie réduite aux cartes postales portant la bonne réponse. A. Viricel répond alors de manière tautologique à la question de Blaise : la procédure des tirages successifs, décrite au niveau 1, ne le désavantage pas puisqu'on fait l'hypothèse de modèle qu'elle ne le désavantage pas.

Ainsi Blaise a-t-il raison de prétendre qu' « *affirmation ne vaut pas réponse* ».

Qu'en est-il des réponses de P. Le Gall et J. Verdier ?

On petit constater qu'elles se placent d'emblée au niveau 1 du modèle, faisant l'hypothèse d'équiprobabilité : P(A) = 1/n, si l'on tire parmi les bonnes réponses. Pour retrouver ce même résultat dans l'autre procédure, P. Le Gall et J. Verdier introduisent une probabilité conditionnelle : $P(A/A_k) = 1/n$ et, après des calculs plus ou moins savants, obtiennent: P'(A) = 1/n, où P' est la probabilité associée à cette autre procédure.

Mais qu'est-ce que $P(A/A_k)$? On est ici en face d'un objet mathématique, prenant son statut au sein de la théorie abstraite des probabilités (la définition de P(A/B) est donnée sans aucune référence au sens pseudo-concret des événements A et B). On se place donc à un **niveau 2** : celui de la mathématisation. Dans ce cadre, on (le professeur) donne la définition : $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, reliant ce nouvel objet à la probabilité a priori.

Du point de vue de la théorie mathématique abstraite, cela est consistant. On définit ainsi une nouvelle probabilité avec laquelle on peut faire des calculs (et J. Verdier ne s'en prive pas !) qui ne font que souligner la pertinence ou l'adéquation de la théorie probabiliste à l'idée que l'on se fait de la réalité (ouf !).

Mais pour donner un sens pseudo concret à cette probabilité conditionnelle, il faut la mettre en regard du modèle de niveau 1. C'est le problème didactique auquel se heurtent tous nos collègues de terminale.

- Ou bien on reste au niveau 2 et on donne la définition aux élèves. Ils doivent l'apprendre et l'appliquer dans les situations où, par effet de contrat didactique, un accord tacite avec le professeur suffira pour valider les calculs qui en résultent.
- Ou bien on veut lui donner un sens plus concret et, comprimant les niveaux 1 et 2, on présente aux élèves, une "justification" cardinaliste (ou fréquentiste) : si on fait l'hypothèse d'équiprobabilité sur Q (l'ensemble de toutes les cartes), alors "*il est clair que*" la trace de la probabilité P sur l'ensemble B des bonnes cartes est aussi équirépartie ; et si P(A/B) est conçue comme le rapport du nombre des cartes favorables à la réalisation de A au nombre total de cartes qui réalisent B, on a par dénombrement "naturel" :

$$P(A|B) = \frac{\mathrm{Card}(A \cap B)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\mathrm{Card}(A \cap B)}{\mathrm{Card}(B)} \times \frac{\mathrm{Card}(\Omega)}{\mathrm{Card}(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \;;$$

Alors P. Le Gall et J. Verdier "démontrent" avec leurs savants calculs un résultat ($P(A) = \dfrac{1}{n}$ dans les deux cas) qui, pris comme hypothèse de modèle, sert de justification heuristique à la définition de l'objet P(A/B) qu'ils utilisent à cette fin). Peut-on plus allègrement se mordre la queue ? (La solution tordue de J. Verdier ferait plutôt penser au recollement d'une bande de Möbius !).

Ainsi s'éclairent les propos de Blaise: « *Il m'expliqua ensuite qu'il s'était vite rendu compte que la formalisation calculatoire ne rimait à rien puisqu'elle ne faisait que décliner sur des lignes et des lignes de sommations plus originales*

et plus intéressantes les unes que les autres le double fait que l'on supposait à chaque pas », et rendons hommage à la profondeur de la remarque qui suit, si fidèlement transcrite par sa sœur Gilberte : « *il était bien inutile d'aligner des équations pour obtenir ce que l'on avait postulé en permanence* » !
Bien qu'à l'aise, Blaise, dans les mathématiques, notons son comportement pragmatique qui le conduit à une décision de niveau 0, « améliorant sensiblement ses "chances" ».

Alors, il reste deux questions et un exercice:

- Une question mathématique : J. Verdier utilise une formule peu connue de combinatoire, $\sum_{j=0}^{m}\binom{p+j}{p}=\binom{p+m+1}{p+1}$, pour obtenir le même résultat que P. Le Gall, $p(A)=\frac{1}{n}$.

Dans la mesure où : P(A/B) dans Le Gall = P(A/B) dans Verdier, les calculs pris à l'envers sont-ils une démonstration probabiliste de cette formule ? Qu'en pensez-vous ?

- Une question didactique : L'introduction des 3 niveaux de description d'une expérience aléatoire vous semble-t-elle éclairante pour comprendre certains paradoxes, certains comportements ambigus des élèves, pour analyser certains contrats didactiques et certains énoncés de Bac ?

Précisons à nouveau ces trois niveaux:

- **Niveau 0** : description naïve du déroulement d'une expérience effective du domaine du sensible, dont la répétition, jusqu'à la stabilisation de la fréquence d'un événement observé, donne à penser sur la complexité des phénomènes aléatoires, tout en constatant dans leur répétition une certaine régularité.

- **Niveau 1**, dit de la modélisation : description codée d'une expérience imaginaire simplifiée, pseudo concrète, abstraite dans le domaine des idées, porteuse des hypothèses du modèle et du concept de probabilité.

- **Niveau 2**, dit de la mathématisation : dans le cadre d'une théorie mathématique formelle (ensembles, ...), introduction d'objets nouveaux (probabilité-mesure) par leurs définitions axiomatiques et formulation d'hypothèses abstraites.

La distinction explicite en classe de ces trois niveaux par des vocabulaires spécifiques ("fréquences" versus "probabilités"...) et par des traitements statutairement différents (déclarations de bon sens, combinatoire et raisonnements adaptés à des situations pseudo concrètes, applications de théorèmes), vous semble-t-elle pertinente ?
Je suis preneur de vos remarques : écrire à J. Verdier, IREM de Lorraine, qui transmettra.

- Un exercice :

A, B, C tirent à la courte paille pour savoir qui sera mangé. A, le plus costaud tire le premier ; B, son ami, tire en second. Le hasard ayant fait son oeuvre, C n'a plus le choix et prend celle qui reste. Pas de chance, il tombe sur la petite. Il ne peut s'empêcher de penser qu'en tirant le premier, sa bonne étoile ne l'aurait pas abandonné et sa main aurait été plus heureuse
Question : que répondez-vous à un élève qui pense comme C ?

Question subsidiaire (mais intéressée, mes neurones expriment un certain tropisme: ils sont disponibles pour une relation... platonique, bien sûr) : Qui selon vous est Gilberte Pascal ?
Inscrivez votre réponse sur carte postale à l'adresse de l'IREM de Besançon, la 17ème carte reçue gagnera une brochure.

Envoyez vos réponses à l'A.P.M.E.P., IREM de lorraine, BP 239, 54506-VANDOEUVRE CEDEX. Nous les transmettrons à Michel Henry et les publierons dans un prochain numéro.
Nous espérons que les prochains problèmes du Petit Vert susciteront autant de réflexions et de courriers !

à signaler

Le n° 338 de novembre 1995 des CAHIERS PEDAGOGIQUES est presque entièrement consacré aux pratiques de formation des enseignants.

Ce dossier d'une cinquantaine de pages est coordonné par Françoise CLERC, de l'I.U.F.M. de Lorraine.
On y trouvera notamment quelques "Questions ouvertes" de Philippe PERRENOUD (Genève) et un article sur les liens entre Didactique et Pédagogie de Michel DEVELAY (Lyon).

Ce numéro est en vente au C.R.D.P., ou encore par correspondance aux Cahiers Pédagogiques, 18 passage Robin, 44000-NANTES. Prix : 45 F.

Solution du problème du trimestre dernier (n°43)

proposé par Michel THIRY, de NANCY.

On joint deux à deux *n* points d'un cercle : quel est le nombre **maximal** de régions du disque que définissent ces cordes ?

N.D.L.R. : cet énoncé se trouve dans beaucoup de manuels de lycée pour montrer qu'il faut se méfier des "fausses" relations de récurrence ([1]) ; mais on n'y trouve pas le calcul du nombre de régions en fonction de *n*.

([1]). 2 régions pour $n = 2$, 4 régions pour $n = 3$, 8 régions pour $n = 4$, 16 régions pour $n = 5$. Peut-on dire "**etc**." ?

Nous avons reçu cinq réponses pour ce problème, ayant pour auteurs Jérôme CARDOT (29 Brest), Claude PAGANO (83 La Seyne-sur-mer), "Gilberte PASCAL" (54 Nancy), Christiane ROHMER (88 Neufchâteau) et André VIRICEL (54 Villers-lès-Nancy).
Les solutions sont essentiellement de deux types : démonstration par récurrence et utilisation de la relation d'Euler pour les graphes connexes.

1- Récurrence (J. Cardot. C. Pagano. C. Rohmer, A. Viricel) :

Soit $P(n)$ le nombre de régions définies avec n points A_1, ... A_n placés dans cet ordre sur le cercle.
Introduisons un autre point, B, entre A_1 et A_n, et cherchons à déterminer une relation entre $P(n)$ et $P(n+1)$. La corde $[A_kB]$ détermine deux demi-plans ouverts ; dans l'un des deux se trouvent k-1 points, et dans l'autre n-k points. Joints deux à deux, ces points déterminent $(k-1)(n-k)$ cordes qui coupent $[A_kB]$; on obtient donc, à partir de cette corde, $(k-1)(n-k) + 1$ régions supplémentaires.

En considérant les cordes obtenues pour $k = 1, ..., n$, on obtient finalement :

$$P(n+1) = P(n) + \sum_{k=1}^{n}\left[(k-1)(n-k)+1\right] \text{ soit}$$

$$P(n+1) = P(n) + n(1-n) + (n+1)\sum_{1}^{n} k - \sum_{1}^{n} k^2 \ .$$

Et comme $\displaystyle\sum_{1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, il vient :

$$P(n+1) = P(n) + \frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 8n) \ .$$

Sommons cette formule entre 1 et N-1 : $\displaystyle P(N) = P(1) + \frac{1}{6}\left(\sum_{n=1}^{N-1} n^3 - 3\sum_{n=1}^{N-1} n^2 + 8\sum_{n=1}^{N-1} n\right)$.

Et, comme $\displaystyle\sum_{1}^{m} k^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$ et $P(1) = 1$, il vient finalement :

$P(N) = 1 + \dfrac{N(N+1)(N^2-5N+18)}{24}$ pour tout N ≥ 1.

En remarquant que $n^2 - 5n + 18 = (n-2)(n-3) + 12$, on peut finalement écrire :

$$\boxed{P(n) = 1 + C_n^2 + C_n^4}$$

2- Relation d'Euler (G. Pascal):

Les *n* points définissent un polygone convexe inscrit dans le cercle, et tous les segments obtenus en joignant - de toutes les façons possibles - deux de ces points, définissent à l'intérieur du disque, en y adjoignant les arcs de cercle joignant deux points consécutifs, un graphe connexe. Notons *p* le nombre de sommets de ce graphe qui sont intérieurs au cercle, *a* le nombre de ses arêtes rectilignes et *c* le nombre de ses "cellules" (surfaces homéomorphes à un point déterminées par les arêtes). Le nombre *S* de sommets du graphe est alors égal à *p* + *n*, le nombre *A* de ses arêtes est égal à *a* + *n*, et le nombre *R* de régions déterminées à l'intérieur du disque n'est autre que *c*. La relation d'Euler pour un tel graphe est *S* – *A* + *R* = 1; on en déduit *R* = 1 – *S* + *A*, ou encore :
R = 1 – *p* + *a* (1).

D'autre part:
* si on multiplie par 2 le nombre d'arêtes *rectilignes*, on obtient 4 fois chaque sommet intérieur du graphe, et *n* - 1 fois chaque sommet du polygone ; soit : 2*a* = 4*p* + *n*(*n* - 1), ou encore $a = 2p + C_n^2$ (2).
* le nombre de points intérieurs est égal au nombre de choix possibles de 4 points distincts parmi les *n* sommets du polygone (les extrémités des diagonales dont ils sont l'intersection) ; soit $p = C_n^4$ (3).

Des 3 relations ci-dessus on tire aisément : $\boxed{R = 1 + C_n^2 + C_n^4}$

Remarques :

1- Certains correspondants (G. Pascal, A. Viricel) signalent que, moyennant l'hypothèse *a priori* que le nombre P(n) est un polynôme en *n*, on peut démontrer (grâce aux premiers termes) que ce polynôme est nécessairement celui qui est donné ci-dessus.

2- Certains (C. Pagano, A. Viricel) font remarquer que (puisque *P*(*n*) est un polynôme de degré 4), si l'on calcule les différences successives :

$$Q(n) = P(n+1) - P(n)$$
$$R(n) = Q(n+1) - Q(n)$$
$$S(n) = R(n+1) - S(n)$$
$$T(n) = S(n+1) - S(n)$$

On constate que la suite T est constante et ici égale à 1. Ce qui permet de construire la suite P de proche en proche, via les suites S, R et Q :

T	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	1	2	4	7	11	16	22	29	37	46
Q	1	2	4	8	15	26	42	64	93	130
P	**1**	**2**	**4**	**8**	**16**	**31**	**57**	**99**	**163**	**256**

On retrouve ce résultat très connu cité dans l'énoncé : la suite $P(n)$ commence comme la suite géométrique 2^{n-1}, mais cette conjecture s'avère fausse à partir de $n = 6$.

LE PROBLEME DU TRIMESTRE n° 44

Proposé par Jean-Yves Helly, Lycée Jean Macé, Rennes

A l'intérieur d'un billard circulaire, on place une bille en un point A distinct du centre O.

Construire le trajet ABCA que doit suivre la bille, pour qu'après deux réflexions successives sur la bande elle repasse par A.

Calculer la longueur de la trajectoire en fonction du rayon et de la distance AO = a.

Envoyez vos solutions à Bernard PARZYSZ, 3 rue Marie Sautet, 57000 METZ, ainsi que toute proposition pour les numéros à venir.

ANNONCE

Pour se faire connaître, l'IREM de Lorraine a décidé d'envoyer une petite brochure dans tous les établissements de l'Académie.

Cette brochure devrait arriver en décembre (ou au plus tard début janvier).

« Guettez » son arrivée, et veillez à ce que votre chef d'établissement la fasse bien circuler auprès de tous vos collègues de mathématiques.