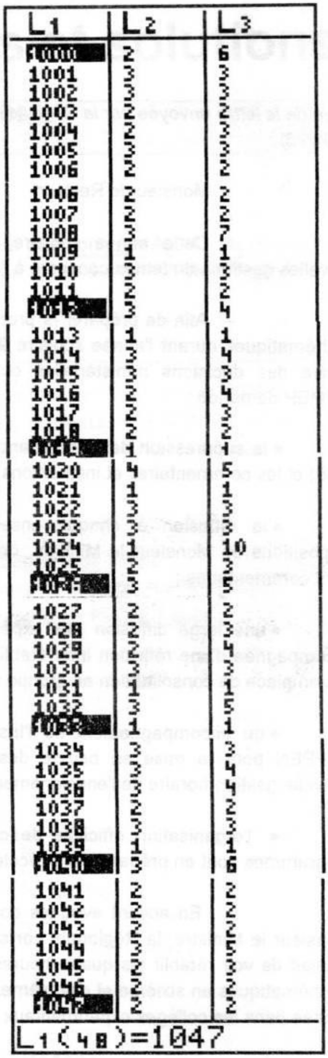
Fonctions ω(n) et Ω(n)

Le 18 janvier, lors de sa conférence prononcée à l'occasion de la Journée Régionale des Mathématiques, Gérard MATHIEU nous a parlé (entre autres) des deux fonctions arithmétiques ω et Ω définies de la façon suivante :

si n est un entier naturel, ω(n) est le nombre de facteurs premiers différents composant n, et Ω(n) est le nombre de ces facteurs premiers comptes avec leur ordre de multiplicité.
Par exemple, pour n = 1080 = 2×2×2×3×3×3x5, ω(n) = 3 [il y a trois facteurs premiers distincts, 2, 3 et 5], et Ω(n) = 7 [en comptant les ordres de multiplicité].

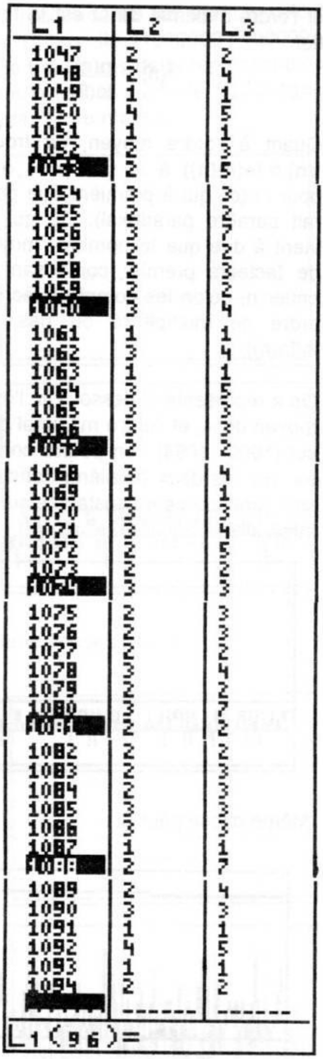
J'ai voulu illustrer graphiquement les propos tenus par Gérard MATHIEU, afin de pouvoir "visualiser" les propriétés qu'il a démontrées.

Les fonctions ω et W ont un graphe très irrégulier sur **N**.
Voici par exemple les valeurs prises par ω(n) [colonne L2] et Ω(n) [colonne L3] pour n variant de 1000 à 1094 [colonne L1] :



L1	L2	L3
1000	2	6
1001	3	3
1002	3	3
1003	2	2
1004	2	3
1005	3	3
1006	2	2
1006	2	2
1007	2	2
1008	3	7
1009	1	1
1010	3	3
1011	2	2
1012	3	4
1013	1	1
1014	3	4
1015	3	3
1016	2	4
1017	2	3
1018	2	2
1019	1	1
1020	4	5
1021	1	1
1022	3	3
1023	3	3
1024	1	10
1025	2	3
1026	3	5
1027	2	2
1028	2	3
1029	2	4
1030	3	3
1031	1	1
1032	3	5
1033	1	1
1034	3	3
1035	3	4
1036	3	4
1037	2	2
1038	3	3
1039	1	1
1040	3	6
1041	2	2
1042	2	2
1043	2	2
1044	3	5
1045	2	3
1046	2	2
1047	2	2

L1(48)=1047



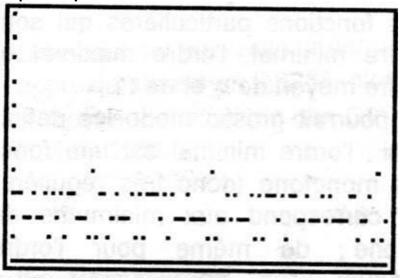
L1	L2	L3
1047	2	2
1048	2	4
1049	1	1
1050	4	5
1051	1	1
1052	2	3
[illegible]	2	5
1054	3	3
1055	2	2
1056	3	7
1057	2	2
1058	2	3
1059	2	2
[illegible]	3	4
1061	1	1
1062	3	4
1063	1	1
1064	3	5
1065	3	3
1066	3	3
[illegible]	2	2
1068	3	4
1069	1	1
1070	3	3
1071	3	4
1072	2	5
1073	2	2
[illegible]	3	3
1075	2	3
1076	2	3
1077	2	2
1078	3	4
1079	2	2
1080	3	7
[illegible]	2	2
1082	2	2
1083	2	3
1084	2	3
1085	3	3
1086	3	3
1087	1	1
[illegible]	2	7
1089	2	4
1090	3	3
1091	1	1
1092	4	5
1093	1	1
1094	2	2
	------	------

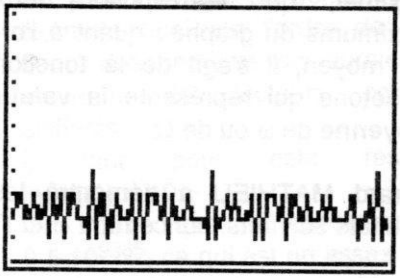
L1(96)=

Pour tout p premier, on a bien sûr $\omega(p) = \Omega(p) = 1$.

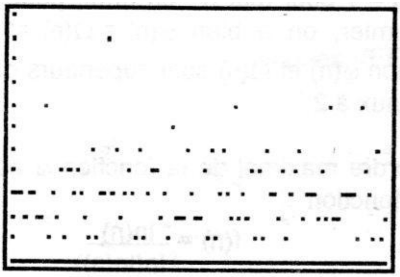
On constate que pour la "majorité" des nombres, $\omega(n) = 2$ ou $\omega(n) = 3$: très rares sont les nombres se décomposant en quatre facteurs premiers ou plus. Ici, il n'y a que 1020, 1050 et 1092.

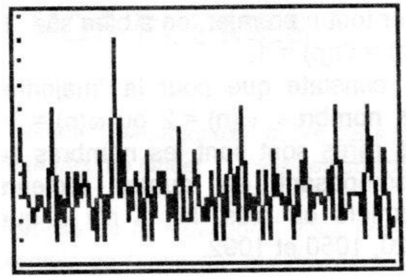
Voici les représentations graphiques de w sur l'intervalle [1000 ; 1094], l'une en prenant simplement les points $(n\,;\omega(n))$, l'autre en les reliant pour plus de "lisibilité" :





Et voici les représentations graphiques de Ω sur le même intervalle :





[la pointe extrême correspond à $\Omega(1024) = 10$, car $1024 = 2^{10}$].

Bien que les représentations graphiques de ω et de W soient "très irrégulières", on peut s'intéresser à trois fonctions particulières qui sont l'ordre minimal, l'ordre maximal et l'ordre moyen de ω et de Ω.

On pourrait grosso modo les définir ainsi : l'ordre minimal est une fonction monotone (donc très régulière) qui correspond aux minimums du graphe ; de même pour l'ordre maximal, qui correspondra aux maximums du graphe ; quant à l'ordre moyen, il s'agit de la fonction monotone qui représente la **valeur moyenne** de ω ou de Ω.

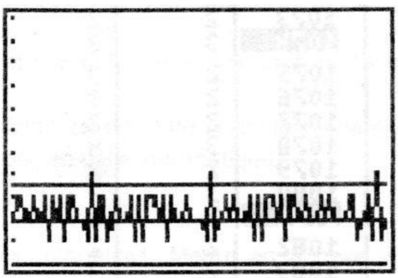
Gérard MATHIEU a démontré les résultats suivants, concernant ω et Ω :

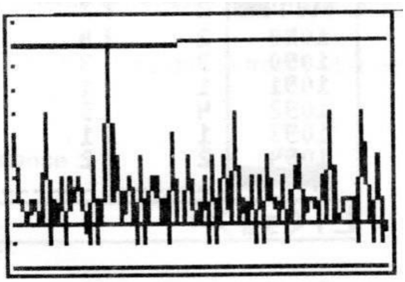
l'ordre minimal de w et l'ordre minimal de Ω sont la fonction définie par f(n) = 1 pour tout n ; en effet, pour p premier, on a bien $\omega(n) = \Omega(n) = 1$; sinon ω(n) et Ω(n) sont supérieurs ou égaux à 2.

L'ordre maximal de la fonction ω est la fonction $f(n) = \dfrac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$ et l'ordre maximal de Ω est la fonction $f(n) = \dfrac{\ln(n)}{\ln(2)}$

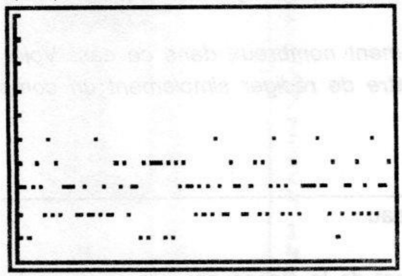
Quant à l'ordre moyen, on trouve **f(n) = ln(ln(n))** à la fois pour ω et pour Ω (ce qui à première vue pourrait paraître paradoxal). Ce qui revient à dire que le nombre "moyen" de facteurs premier composant un entier n, qu'on les compte avec leur ordre de multiplicité ou pas, est ln(ln(n)).

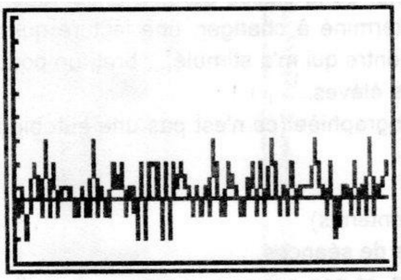
On a représenté ci-dessous ω, l'ordre moyen de ω, et l'ordre maximal de ω sur [1000 ; 1094] ; on pourra constater que les deux dernières fonctions sont pratiquement constantes sur cet intervalle ; même chose pour Ω :



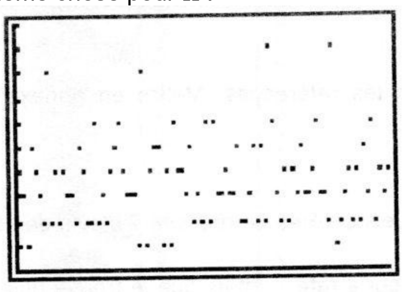


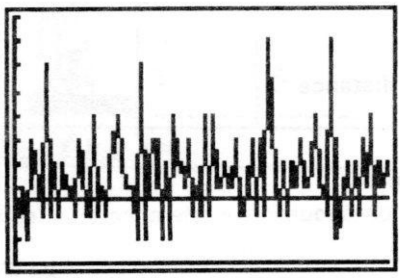
J'ai recommencé les mêmes calculs sur l'intervalle [1000000 ; 1000094], et je trouve ces deux représentations pour ω (sur la seconde figure également l'ordre moyen) :





Même chose pour Ω :





Sur cet intervalle [1000000;1000094], on ne trouve que six nombres premiers : 1000003, 1000031, 1000033, 1000037, 1000039 et 1000081, qui donneront $\omega(n) = \Omega(n) = 1$.

Le maximum de ω vaut 5, et il est obtenu pour les six nombres 1000008, 1000020, 1000050, 1000065, 1000075 et 1000090. Ce dernier nombre, par exemple, se décompose ainsi : $2\times5\times7^2\times13\times157$.

Le maximum de Ω vaut 9, et il est obtenu pour $n = 1000064 = 2^7\times13\times601$ et pour $n = 1000080 = 2^4\times3^3\times5\times463$.

Dans tout cet intervalle, ln(ln(n)) vaut approximativement 2,6258, alors que la moyenne statistique des Ω(n) vaut environ 2,86.

On pourrait aussi se demander par exemple quel est l'ordre de grandeurs des nombres qui auraient en moyenne 10 facteurs premiers distincts.

Il faut pour cela résoudre $\ln(\ln(n)) = 10$.

On trouve quelque chose comme $9{,}5\times10^{9565}$, ce qui est un assez grand nombre (imaginez que la Terre n'existe que depuis $1{,}5\times10^{17}$ secondes environ !!!)..

Jacques VERDIER