Problèmes et solutions

Solution du problème du trimestre n° 39 (septembre 1994)

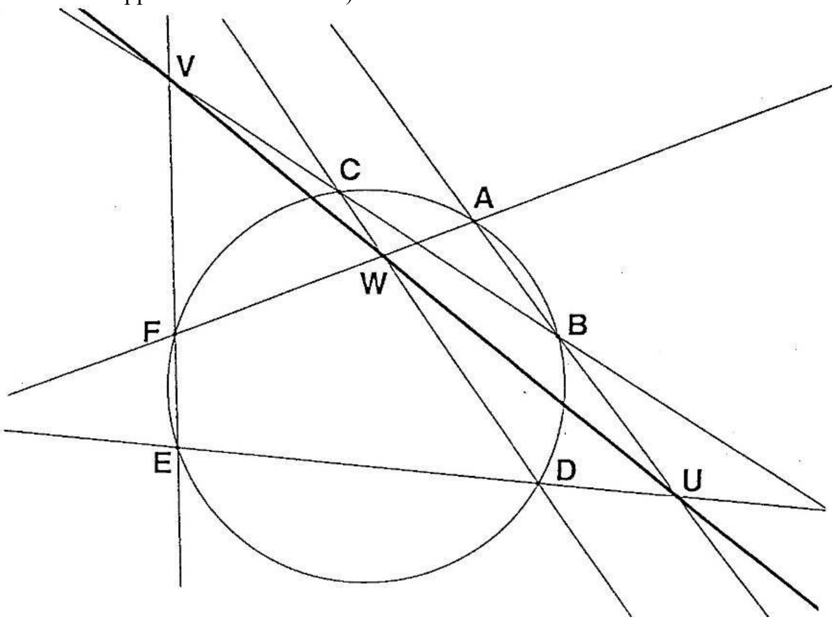
La « tourniquette »

Sur une conique (*C*) on choisit quatre points **quelconques** A_0, A_1, A_2 et A_3. On construit les points A_4, A_5 et A_6 (*C*) de façon à avoir $(A_3A_4)//(A_0A_1)$, $(A_4A_5)//(A_1A_2)$ et $(A_5A_6)//(A_2A_3)$. Montrer que A_6 est alors confondu avec A_0.

Nous avons reçu, pour ce problème, des solutions de : Vincent **LÉCUYER** (54 PULNOY), Claude **MORIN** (87 LIMOGES), Christiane **ROHMER** (88 NEUFCHÂTEAU), Jacques **VERDIER** (54 NANCY) et André **VIRICEL** (54 VILLERS-LÈS-NANCY)

1- Démonstration générale : (A. VIRICEL)

La démonstration proposée s'appuie sur le théorème de Pascal : ***Les trois points d'intersection des côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une conique sont alignés*** (sur une droite appelée droite de Pascal) :



Dans le cas du problème, appelons :

U le point d'intersection de (A_0A_1) et (A_3A_4),
V le point d'intersection de (A_1A_2) et (A_4A_5),
W le point d'intersection de (A_2A_3) et (A_5A_0).

Par hypothèse, les points U et V appartiennent à la droite de l'infini.

Le théorème de Pascal, appliqué à l'hexagone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$, nous dit que le point W appartient à la droite (UV) : il est donc, lui aussi, à l'infini. Par suite, les droites (A_2A_3) et (A_5A_0) sont parallèles.

D'autre part, par hypothèse, les droites (A_2A_3) et (A_5A_6) sont parallèles. Il en résulte que les droites (A_5A_0) et (A_5A_6) sont parallèles (et donc confondues). Et finalement, les points A_0 et A_6 sont confondus.

<u>Remarques</u> :

C. MORIN définit sur l'ensemble des points d'une conique (Ω) la loi interne suivante : I étant un point fixé de (Ω), on pose A+B = C, C étant le point où la parallèle à (AB) menée par I recoupe (Ω) ; il remarque que l'énoncé est équivalent à l'associativité de cette loi (qui confère à (Ω,+) une structure de groupe commutatif).
A. VIRICEL, qui démontre divers cas particuliers de l'énoncé général (voir ci-après), va ensuite plus loin, en "gonflant" le problème en 3 dimensions, sous la forme de la conjecture suivante (qu'il démontre dans quelques cas particuliers) :

> Soient, sur une quadrique (Q), trois coniques A, B, C (intersections de (Q) avec les plans a, b, c) telles que B soit tangente à A et à C.
> On considère, sur (Q) :
> - la conique A', tangente à C et située dans un plan parallèle à a
> - la conique B', tangente à A' et située dans un plan parallèle à b.
> Alors la conique C' de (Q), située dans un plan parallèle à c, est tangente à A.

(N.B. : en fait, il y a 2 possibilités pour A', et 4 pour B' ; d'où 8 pour C'. Il faut donc "choisir convenablement" les coniques, étant donné que deux coniques C' seulement sont tangentes à A).

2- Cas de la parabole : (C. MORIN, C. ROHMER, J. VERDIER et A. VIRICEL)

Remarque préliminaire : par un choix judicieux des axes de coordonnées, l'équation d'une parabole (P) peut toujours se ramener à $y = x^2$.

Soient alors deux points distincts A et B de (P), de coordonnées respectives (x_A, x_A^2) et (x_B, x_B^2) ; le coefficient directeur de la droite (AB) est x_A+x_B.
(Remarque: cette formule est encore valable lorsque A = B, car alors le coefficient directeur de la tangente à (P) en A est $2x_A$).

Le parallélisme des cordes (AB) et (CD) se traduit donc par $x_A+x_B = x_C+x_D$. Avec les données de l'énoncé, on obtient par conséquent :

$$x_0+x_1 = x_3+x_4$$
$$x_1+x_2 = x_4+x_5$$
$$x_2+x_3 = x_5+x_6.$$

Ce système conduit (par addition) à $x_6 = x_0$, c'est-à-dire à $A_6 = A_0$.

3- Cas des coniques à centre :

a) Hyperbole : (C. MORIN, C. ROHMER, J. VERDIER et A. VIRICEL)

Comme ci-dessus, on remarque que l'équation d'une hyperbole (H) peut toujours se ramener à $y = \frac{1}{x}$; d'autre part, si A et B sont deux points distincts (resp. confondus) de (H), le coefficient directeur de la corde (AB) (resp. de la tangente en A à (H)) est $-\frac{1}{x_A x_B}$. Le parallélisme des cordes (AB) et (CD) se traduit donc ici par $-\frac{1}{x_A x_B} = -\frac{1}{x_C x_D}$, soit $x_A x_B = x_C x_D$.

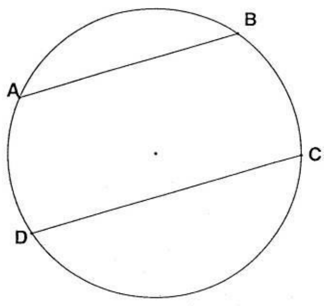
Avec les données de l'énoncé, on obtient alors le système :

$\begin{cases} x_0 x_1 = x_3 x_4 \\ x_1 x_2 = x_4 x_5 \\ x_2 x_3 = x_5 x_6 \end{cases}$, système qui donne (par multiplication) $x_6 = x_0$, soit $A_6 = A_0$.

b) Ellipse :

Une ellipse peut être considérée comme la transformée d'un cercle par affinité orthogonale, et ladite transformation, qui est affine (comme son nom l'indique), conserve le parallélisme. Il suffit donc de démontrer la propriété pour le cercle :

Solution de A. VIRICEL :



Soient deux cordes parallèles [AB] et [CD] d'un cercle (C). du plan orienté ; on a l'égalité d'arcs (orientés) arc(AD) = arc(CB) [*figure ci-dessus*].

Avec les données du problème, on aura donc ici

$\begin{cases} \text{arc}(A_0A_4) = \text{arc}(A_3A_1) \\ \text{arc}(A_4A_2) = \text{arc}(A_1A_5) \quad \text{(arcs orientés)} \\ \text{arc}(A_2A_6) = \text{arc}(A_5A_3) \end{cases}$

D'où, par addition (Chasles) : arc(A_0A_6) = arc nul, soit $A_0 = A_6$.

Solution de V. LÉCUYER :

Deux cordes parallèles d'un même cercle ont même médiatrice.

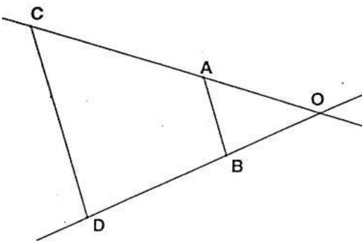
Avec les données du problème, appelons s_1, s_2, s_3 les réflexions par rapport respectivement aux médiatrices des cordes $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$. On a alors $A_6 = (s_3 o s_2 o s_1)^2(A_0)$. De plus, la transformation $s_3 o s_2 o s_1$, composée de trois réflexions par rapport à des droites concourantes, est une réflexion ; elle est donc involutive, et $A_6 = A_0$.

N.B. : C. MORIN et C. ROHMER proposent, pour le cas de l'ellipse, une solution analytique à partir de la représentation paramétrique x = a.cost, y = b.cost de l'ellipse :
soient A, B, C, D quatre points de l'ellipse (E), correspondant respectivement aux valeurs t_A, t_B, t_C, t_D du paramètre ; le parallélisme des cordes (AB) et (CD) se traduit par l'égalité $t_A + t_B = t_C + t_D$, la suite de la démonstration étant analogue à celle indiquée pour la parabole.

On peut remarquer que cette condition ne fait que traduire, après être revenu de l'ellipse au cercle par affinité orthogonale, l'égalité d'arcs AD = CB de la démonstration précédente.

4- Cas d'une conique dégénérée en deux droites:

a) Droites sécantes : (A. VIRICEL)



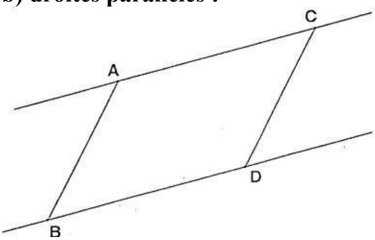
Soient deux droites sécantes en O, et deux points A et C de l'une, deux points B et D de l'autre (tous quatre distincts de O). Le parallélisme de (AB) et (CD) se traduit (Thalès) par l'égalité $\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}}$.
Dans le cas du problème, on suppose les 4 points A_0, A_2, A_4, A_6 alignés sur l'une des deux droites, et les 3 points A_1, A_3, A_5 alignés sur l'autre. Les conditions de parallélisme de l'énoncé se traduisent par les égalités :

$$\frac{\overline{OA_0}}{\overline{OA_4}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA_3}}, \quad \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA_5}} = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_4}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_6}} = \frac{\overline{OA_3}}{\overline{OA_5}}$$

d'où l'on déduit (par multiplication et simplification) : $\frac{\overline{OA_0}}{\overline{OA_6}} = 1$, puis enfin $\overline{OA_0} = \overline{OA_6}$,

soit $A_0 = A_6$.

b) droites parallèles :



Soient deux droites parallèles, et deux points A et C de l'une, deux points B et D de l'autre. Le parallélisme de (AB) et (CD) se traduit par le fait que ABDC est un parallélogramme et donc par l'égalité vectorielle $AC = BD$.
Dans le cas du problème, et en plaçant les points comme dans le cas précédent, on obtient ainsi les trois égalités : $A_0A_4 = A_1A_3$, $A_4A_2 = A_5A_1$ et $A_2A_6 = A_3A_5$.

Par addition (Chasles), on en déduit $A_0A_6 = 0$, soit $A_0 = A_6$.

N.B. : En comparant l'étude des divers cas particuliers, on peut remarquer des "homomorphismes" entre les démonstrations ; on voit ainsi comment se transforment ces démonstrations lorsqu'on passe de la parabole à l'hyperbole (somme→produit) ou au cercle (abscisse →abscisse curviligne), et des droites sécantes aux droites parallèles (rapport de colinéarité → vecteur).
On peut également voir ici à l'œuvre la puissance d'une théorie générale des coniques, qui permet justement de ne pas traiter séparément les divers cas particuliers - faisant cependant perdre le plaisir d'une "promenade" parmi ceux-ci -, ainsi que celle de la géométrie projective, qui permet de considérer les points à l'infini comme des points "ordinaires".

Problème du trimestre n°41

(proposé par Victor Alexeïevitch BUKOWSKI,
Institut de Mathématiques Appliquées, KHABAROVSK, Russie)

Soit un triangle ABC de centre de gravité G.

La rotation de centre G et d'angle $+2\pi/3$ transforme B en B".
La rotation de centre G et d'angle $-2\pi/3$ transforme C en C".

Démontrer que le triangle AB"C" est équilatéral.

DIXIEME
1985 – 1995
ANNIVERSAIRE

BIBLIOTHEQUE DE LA REGIONALE

Attention : nouvelle adresse pour emprunter les ouvrages (voir page 2) :
Jacqueline EURIAT
par courrier : 44 rue de Bezonfosse, 88000-EPINAL
ou par téléphone (29.35.71.77).

Solution du problème n°40 de décembre 1994

proposé par Michel **BONN** (VANDŒUVRE-LES-NANCY)

Un physicien (nul n'est parfait) dispose d'une réserve contenant une infinité de résistances égales, d'une valeur de 1 Ω chacune.

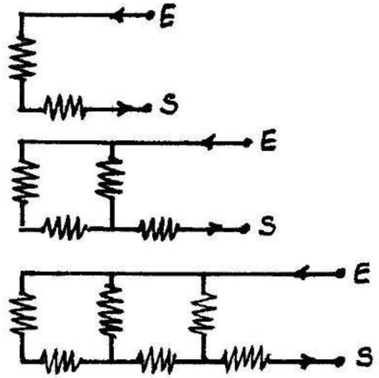
Etant infiniment désœuvré, il s'amuse à construire des circuits électriques selon le calendrier suivant :

premier jour :

deuxième jour :

troisième jour :

et ainsi de suite...



Comme c'est un physicien extrêmement scrupuleux, il note chaque jour (dans un cahier infiniment épais) la résistance du circuit obtenu.

Au bout d'une infinité de jours, il s'aperçoit qu'il est toujours aussi désœuvré, puisque la valeur affichée par son ohmmètre est toujours la même.

Questions :

1° Pouvez-vous expliquer comment ont varié les relevés jour après jour, et identifier la valeur « finale » ?

2° Si le cœur vous en dit, pouvez-vous envisager une généralisation permettant par exemple d'obtenir pour cette valeur n'importe quel nombre fixé à l'avance ?

Les solutions obtenues pour ce problème ont pour auteurs Jérôme **C ARDOT** (55 S AINT-MIHIEL), Joël **LAMOISE** (54 LUNÉVILLE), Vincent **LÉCUYER** (54 PULNOY), Claude **MORIN** (87 LIMOGES) et Jacques **VERDIER** (54 NANCY).

1- Problème initial :

On sait que, étant données deux résistances a et b :
- lorsqu'elles sont placées en série, elles équivalent à la résistance R= a + b ;
- lorsqu'elles sont placées en parallèle, elles équivalent à la résistance R' définie par $\frac{1}{R'}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (soit $R'=\frac{ab}{a+b}$).

En appelant R_n la résistance obtenue au bout de n jours on a, d'après la forme du circuit, la relation de récurrence :

$$R_{n+1}=1+\frac{R_n}{1+R_n}.$$

Posons $R_{n+1} = f(R_n)$, avec $f(x)=1+\frac{x}{1+x}$. La fonction f envoie [1 ; 2] dans lui-même, et on a $0 < f'(x) < 1$ sur cet intervalle ; il en résulte que la suite (R_n) converge vers un point r de cet intervalle, qui vérifie $r = f(r)$. On en déduit alors $r=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (c'est-à-dire le ***nombre d'or***).

Presque tous les correspondants ont remarqué que les valeurs successives de R_n s'écrivent comme quotients de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci définie par $u_1 = u_2 = 1$; plus précisément, on a $R_n=\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}}$.

Remarques :

La suite (R_n) est décroissante ; J. VERDIER note ainsi que "*plus on accumule les résistances dans ce circuit, moins il est résistant*".

C. MORIN précise que, au bout de deux semaines, R_n diffère du nombre d'or de moins de 10^{-11}, et que "*pour le physicien (...) (et pour une calculatrice à 12 chiffres) l'infini est atteint au bout de deux semaines*".

J. LAMOISE, lui, écrit R_n sous la forme $R_n=\frac{2a_n+b_n}{2c_n+d_n}$ où les coefficients sont déterminés par $\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n-1}$.

2- Généralisations :

C. MORIN fait – finement - remarquer que, pour obtenir une résistance de n ohms (avec n entier naturel non nul), il suffit de mettre n résistances d'un ohm en série. Mais on peut difficilement dire qu'il s'agit là d'une *généralisation* du problème précédent !

Plus sérieusement, trois types de généralisations ont été proposés :

Premier type : (V. LÉCUYER, C. MORIN).

On part encore d'une résistance d'un ohm. Chaque jour, on ajoute :

- en parallèle : b résistances de 1 ohm (au lieu d'une seule)
- en série sur ce circuit : a résistances de 1 ohm (au lieu d'une seule).

Par analogie avec le cas initial, on obtient cette fois la relation de récurrence : $R_{n+1} = a + \dfrac{b.R_n}{b + R_n}$. On pose $g(x) = a + \dfrac{bx}{b+x}$; cette fonction g envoie l'intervalle [a ; a+b] dans lui-même, et on a $0 < g'(x) < 1$ sur cet intervalle. La suite (R_n) converge donc vers un point r de cet intervalle, qui vérifie $r = g(r)$; on obtient alors $r = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + 4ab}}{2}$.

Le problème est alors de rendre cette valeur limite égale à n (entier naturel non nul). Ce qui nous mène à l'équation $a(a + 4b) = (2n - a)^2$, avec $a \leq 2n$. Une solution évidente de cette équation est a = l, b =n(n-1) : c'est celle qui a été proposée par les correspondants.

... Mais il y a d'autres solutions. En effet, l'équation précédente peut se mettre sous la forme $n^2 = a(b + b)$.

Ce qui signifie que les solutions sont données par a = k, $b = \dfrac{n^2}{k} - n$, où k est un diviseur de n^2 inférieur ou égal à n.

Deuxième type : (J. VERDIER)

Dans ce modèle, on fait a = b, mais on n'impose plus à a et b d'être entiers. On obtient ainsi une sorte d'"homothétique" de la situation initiale, dans laquelle la valeur-limite est $a \times \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Il suffit donc de prendre $a = \dfrac{2n}{1+\sqrt{5}}$.

Troisième type : (J. CARDOT)

On sait que, pour 0 < q < l, la série 1 + q + q²... converge vers $\dfrac{1}{1-q}$.

L'idée est ici de multiplier par q, à chaque stade, la résistance du jour précédent, la valeur de q étant choisie de façon que $\dfrac{1}{1-q}$ soit égal à l'entier n fixé (soit $q = 1 - \dfrac{1}{n}$).

Appelons C le circuit constitué :

- de n-1 résistances d'un ohm placées en série ;
- d'une résistance d'un ohm placée en parallèle avec cette série.

La résistance de ce circuit est égale à $1 - \dfrac{1}{n}$.

La démarche consistera donc à remplacer, chaque jour, chaque résistance d'un ohm du circuit de la veille par un circuit C.

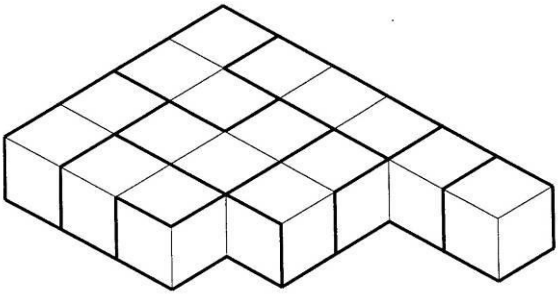
Complément de solution au problème des TRILOSANGES

Proposé par François Drouin

(cf. PETIT VERT n° 39 p. 11 et n° 40 p. 9)

Nous avons reçu de Claude ***MORIN*** *(87 LIMOGES) une contribution relative à ce problème des 9 trilosanges :*

Le plus grand assemblage plat représentable avec les 9 trilosanges comporte 17 cubes ; voici une solution (sans doute la solution à une symétrie près) :

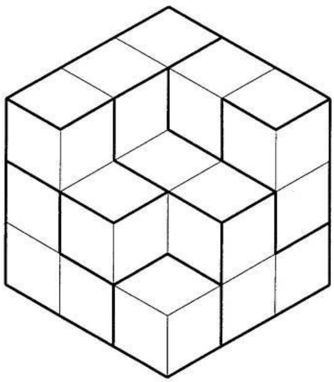


On ne peut pas faire mieux que 17 cubes, car le nombre de faces "verticales" dans un tel assemblage est au moins égal à 10 :

- une face pour chacun des trilosanges 1, 2 et 3 ;
- deux faces pour chacun des trilosanges 4 et 5 ;
- trois faces pour le trilosange 6.

Il reste donc au maximum $3\times9 - 10 = 17$ faces horizontales.

On peut placer les 9 trilosanges dans un hexagone régulier, de façon à représenter un assemblage de 22 cubes (dont 7 sont cachés) :



(il y a deux autres assemblages symétriques l'un de l'autre, en faisant tourner la figure de ±120°)