

Une mosaïque, découverte en 1994 à Alexandrie (Égypte), et qui elle aussi date vraisemblablement du deuxième siècle de notre ère (cf. *Dossier d'Archéologie* n° 201 de mars 1995, p. 86), présente un pavage géométrique dont le motif de base est d'intérêt (*fig. 1*).

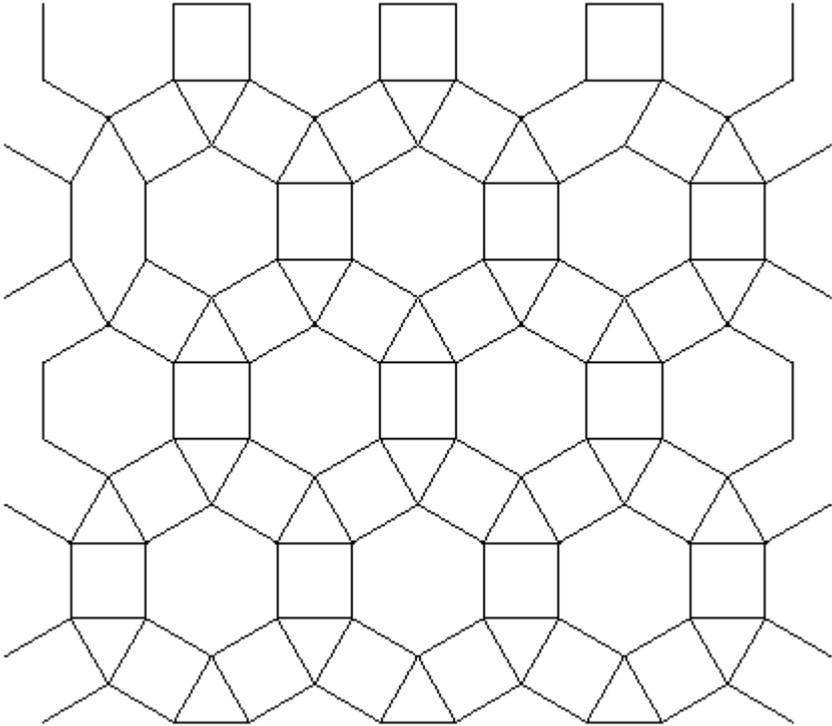


fig. 1

On y voit en effet divers types de polygones réguliers : triangles, carrés, hexagones et dodécagones. De plus, la longueur du côté est la même quel que soit le type de polygone : on ne voit ainsi paraître, sur cette mosaïque, que des segments de même longueur. Enfin, si l'on prend comme figures de base les dodécagones, on voit que tous les autres polygones sont obtenus comme intersections de ces dodécagones. Ainsi, pour chercher à comprendre comment est obtenu ce décor, allons-nous nous intéresser aux dodécagones que nous y voyons figurer.

1. Etude géométrique

Les centres de ces polygones sont situés aux nœuds d'un réseau triangulaire. Cherchons à évaluer les dimensions relatives des mailles du réseau (soit l) et des rayons des cercles circonscrits aux dodécagones (soit R). La *fig. 2* montre que l'on a $\angle AXD = 3 \times 30^\circ = 90^\circ$. Le losange $AXDY$ est donc un carré, et les cercles (X) et (Y) sont orthogonaux. On en déduit $l = \sqrt{2}R$, d'où $R = l/\sqrt{2}$.

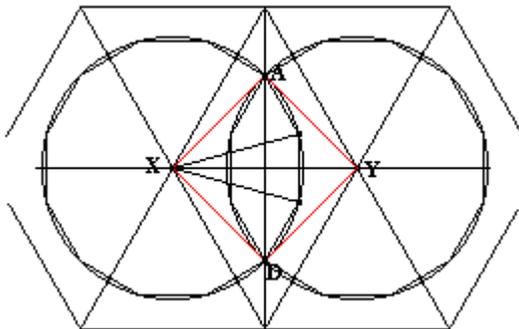


fig. 2

Finalement, le schéma directeur de la mosaïque apparaît constitué de cercles centrés aux nœuds d'un réseau triangulaire de côté l , ces cercles ayant pour rayon $R = l/\sqrt{2}$; on obtient alors la *fig. 3*.

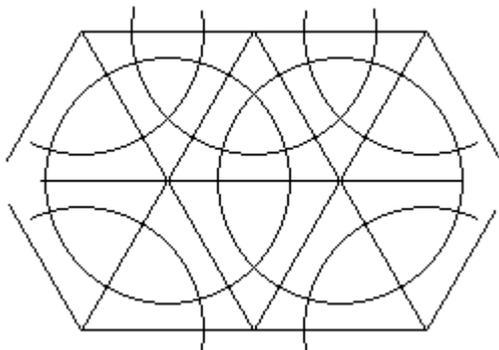


fig. 3

Ce schéma paraît suffisant pour construire l'ensemble du pavage. Vérifions-le.

Par exemple, montrons (*fig. 4*) que les points A, B, C, D sont bien 4 sommets consécutifs du dodécagone régulier inscrit dans le cercle (X) :

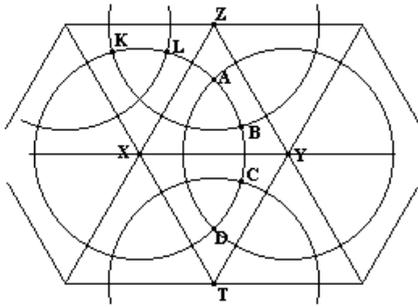


fig. 4

La rotation de centre X transformant le cercle (Z) en (Y) laisse (X) invariant, et transforme le point B en D.

On a donc $(XZ,XY) = (XB,XD) = 60^\circ$.

Comme d'autre part on a $(XA,XD) = 90^\circ$, on en déduit $(XA,XB) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Et, par symétrie par rapport à (XY), $(XC,XD) = 30^\circ$. Et enfin, par différence, $(XB,XC) = 30^\circ$.

Comme on le voit, il s'agit là d'un motif dont la réalisation est aisée, en dépit de l'apparente complexité qu'il peut présenter au premier abord. Du point de vue pratique, on peut procéder comme suit (fig. 5) :

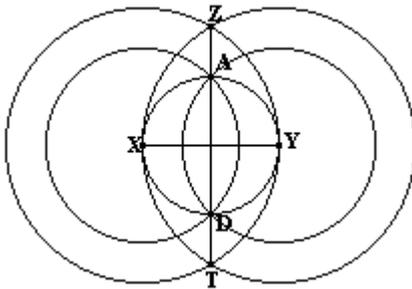


fig. 5

1° *Tracé du réseau triangulaire* : partant du segment [XY] comme base, on construit les cercles (X_0) et (Y_0) , de centre respectifs X et Y, passant respectivement par Y et X, qui fournissent les points d'intersection Z et T. Puis on trace les cercles (Z_0) et (T_0) , de même rayon, qui fournissent les points d'intersection U, V, W, X, et ainsi de suite.

2° *Tracé des cercles circonscrits aux dodécagones* : le cercle de diamètre [XY] coupe [ZT] en A et D, ce qui détermine le rayon $XA = XD$ de ces cercles.

2. Étude algébrique

Ceci étant établi, intéressons-nous maintenant au groupe d'isométries associé à ce pavage. L'observation de la fig. 1 nous montre la présence (fig. 6) :

- de translations, telles que t de vecteur \overrightarrow{XY} ;

- de symétries centrales : S_1 par rapport à X, S_2 par rapport au milieu M de [XY], etc.

- de rotations : comme r de centre X et d'angle 60° ;

- de réflexions : par exemple s par rapport à (XY), s_1 par rapport à (ZT), s_3 par rapport à la médiatrice de [AB] et s_4 par rapport à celle de [KL].

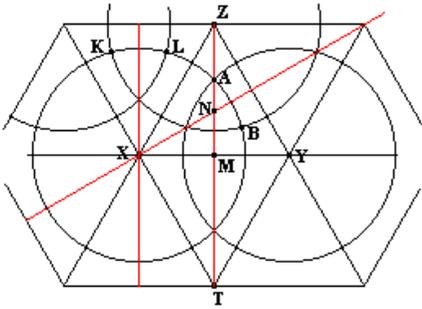


fig. 6

Pour engendrer le groupe d'isométries, nous pouvons nous passer des rotations, puisque l'on a $r = s_3 \circ s_1$.

Nous pouvons également nous dispenser :

- des symétries centrales, car $S_1 = r^3$ et $S_2 = s_2 \circ s_1$;
- des translations : en effet, on peut écrire $t = s_2 \circ s_4 \dots$

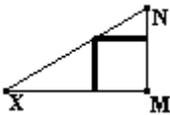


fig. 7

Montrons qu'en fait on peut se ramener à 3 générateurs seulement, à savoir les réflexions s_1, s_2 et s_3 .

Considérons donc leurs 3 axes, et comme région fondamentale engendrant le pavage le « demi-triangle équilatéral » XMN qu'ils déterminent (fig. 7).

N.B. On peut remarquer que X est le centre d'un hexagone et d'un dodécagone, que M est le centre d'un carré, et que N est le centre d'un triangle équilatéral.

Par actions alternées de s_1 et s_3 , on obtient le motif de la fig. 8 ; puis, par actions successives de s_2 et s_3 , celui de la fig. 9.

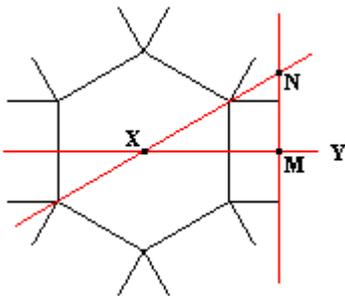


fig. 8

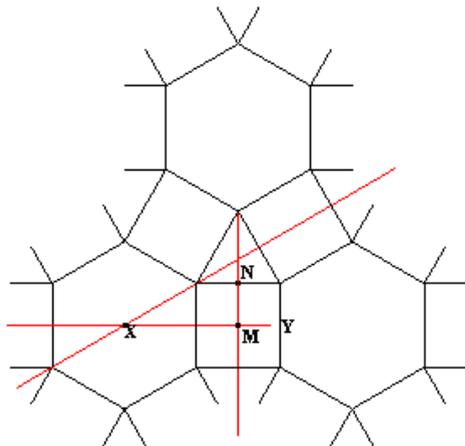


fig. 9

On voit sur cette figure que les 3 réflexions engendrent progressivement le motif de la mosaïque. À titre d'exemples, on a, pour les transformations mises en évidence plus haut :

$$r = s_3 \circ s_1, S_1 = r^3 = (s_3 \circ s_1)^3, S_2 = s_2 \circ s_1 \text{ et } s_4 = S_1 \circ s_1 = (s_3 \circ s_1)^3 \circ s_1, \text{ d'où } t = s_2 \circ s_4 = s_2 \circ (s_3 \circ s_1)^3 \circ s_1.$$

Par contre, deux quelconques d'entre elles ne suffisent pas, car on n'obtient alors que des transformations laissant invariant leur point d'intersection, ce qui ne permet pas d'engendrer de translations, donc d'obtenir un motif illimité.

En résumé, on voit que ce pavage, qui semble à première vue assez complexe, possède en fait une structure relativement simple, tant du point de vue géométrique (réseau triangulaire et cercles de même rayon) que du point de vue algébrique (groupe d'isométries engendré par 3 réflexions). D'autre part, du point de vue des mosaïstes de l'époque, ce motif présente un double intérêt, du fait que sa construction à la règle et au compas est facile à mémoriser sous forme d'un schéma-clé, par exemple du type de celui de la *fig. 10*. Elle est également facile à réaliser, et l'effet décoratif produit en est tout à fait intéressant.

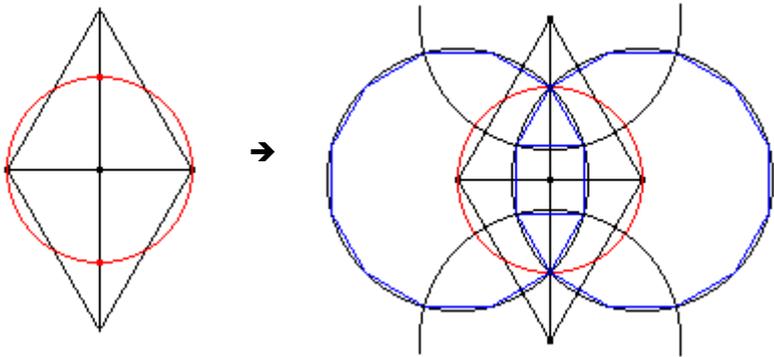


fig. 10