Problème du trimestre n°39, de septembre 1994

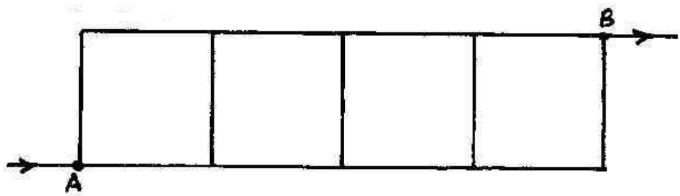
La « tourniquette »

Sur une conique (***C***) on choisit quatre points **quelconques** A_0, A_1, A_2 et A_3. On construit les points A_4, A_5 et A_6 (***C***) de façon à avoir $(A_3A_4)//(A_0A_1)$, $(A_4A_5)//(A_1A_2)$ et $(A_5A_6)//(A_2A_3)$.
Montrer que A_6 est alors confondu avec A_0.

Notre objectif est de trouver le plus grand nombre de solutions pour ce problème « classique ». Alors, même si vous n'en connaissez qu'une, envoyez-la nous…
Envoyez vos solutions à Bernard PAZRZYSZ, 3 rue Marie Sautet, 57000 METZ.

Solution du problème n°38 (PETIT VERT n° 38 de juin 1994)
proposé par André **VIRICEL** (VILLERS-LES-NANCY)

Un conducteur électrique AB est formé de quatre mailles carrées assemblées pour former une sorte d'échelle (voir schéma ci-dessous). Chacun des côtés du carré a une résistance de 1 Ω.
Quelle est la résistance équivalente de l'ensemble ? Peut-on généraliser à ***n*** mailles ?

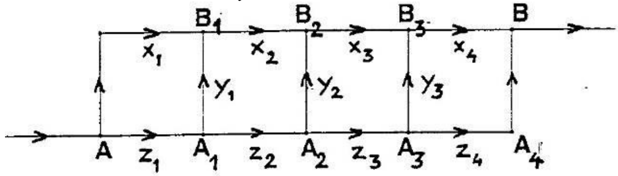


Peu de réponses sont parvenues pour ce problème : la résistance a ... résisté !
Nous n'en avons reçu que trois : de Denis **PÉPIN** (55, BELRUPT), de Richard **BECZKOWSKI** (71, CHALON-SUR-SAÔNE) et d'André **VIRICEL** (54, VILLERS-LES-NANCY).

Voici la solution proposée par Denis PÉPIN.

1. Cas du conducteur à 4 mailles

Dans toute la suite, on considérera que l'intensité du courant qui entre dans la résistance est de 1 ampère.
On raisonne sur les intensités x_i, y_i, z_i sur le schéma ci-dessous :



On obtient les 8 équations en écrivant qu'à chaque nœud la somme algébrique des intensités est nulle :

$x_1 + z_1 = 1$ $\quad$ $x_2 + y_2 = x_3$ $\quad$ $z_2 = y_2 + z_3$

$x_4 + z_4 = 1$ $\quad$ $x_3 + y_3 = x_4$ $\quad$ $z_3 = y_3 + z_4$

$x_1 + y_1 = x_2$ $\quad$ $z_1 = y_1 + z_2$

On obtient quatre autres équations en calculant de deux façons différentes les différences de potentiel entre A_i et B_{i+1} ($A = A_0$ et $B = B_4$) :

$2x_1 = y_1 + z_1$ $\quad$ $y_1 + x_2 = z_2 + y_2$

$2z_4 = y_3 + x_4$ $\quad$ $y_2 + x_3 = z_3 + y_3$

La symétrie du système obtenu donne les égalités suivantes :

$x_1 = z_4$; $x_2 = z_3$; $x_3 = z_2$; $x_4 = z_1$ et $y_1 = y_3$

Pour résoudre ce système, on exprime toutes les intensités à l'aide de $x_1 = i$:

$x_2 = x_1 + y_1 = 4i - 1$
$x_3 = x_2 + y_2 = 15i - 5$
$x_4 = x_3 + y_3 = 56i - 20$
$z_1 = 1 - i$
$z_2 = z_1 - y_1 = 2 - 4i$
$z_3 = z_2 - y_2 = 6 - 15i$
$z_4 = z_3 - y_3 = 21 - 56i$
$y_1 = 2x_1 - z_1 = 3i - 1$
$y_2 = y_1 + x_2 - z_2 = 11i - 4$
$y_3 = y_2 + x_3 - z_3 = 41i - 15$

(on obtient deux fois cette dernière égalité, le système est donc compatible).

$$z_4 = \frac{1}{2}(y_3 + x_4) = \frac{97i - 35}{2}$$

Les deux dernières égalités permettent de calculer $i = \frac{7}{19}$.

Par substitution, il vient alors :

$$x_1 = z_4 = \frac{7}{19}\ ;\ x_2 = z_3 = \frac{9}{19}\ ;\ x_3 = z_2 = \frac{10}{19}\ ;\ x_4 = z_1 = \frac{12}{19}\ ;\ y_1 = y_3 = \frac{2}{19}\ ;\ y_2 = \frac{1}{19}$$

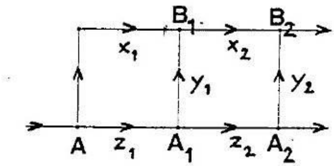
.

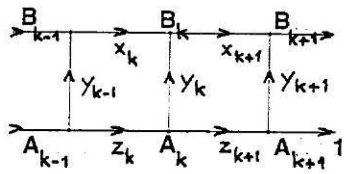
On peut maintenant calculer la résistance équivalente :

$$R_4 = 2\times\frac{7}{19} + \frac{9}{19} + \frac{10}{19} + \frac{12}{19} \text{ soit } \boldsymbol{R_4 = \frac{45}{19}}$$

2. Généralisation à *n* mailles

On généralise les notations précédentes :





On a les 3 relations de récurrence :
$x_{k+1} = x_k + y_k$; $z_{k+1} = z_k - y_k$ et $y_{k+1} = y_k + x_{k+1} - z_{k+1} = x_k - 3y_k - z_k$.

Remarque qui sera utilisée plus loin : la symétrie du montage entraîne que les $3n - 1$ nombres $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \ldots x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}, x_n, z_n$ vérifient les mêmes égalités que $z_n, y_{n-1}, x_n, z_{n-1}, y_{n-2}, x_{n-1}, \ldots z_2, y_1, x_2, z_1, x_1$ respectivement. Ce qui entraîne les égalités $x_k = z_{n+1-k}$ et $y_k = y_{n-k}$.

On obtient, pour tout k, $x_{k+1} + z_{k+1} = x_k + z_k$ (la somme des intensités qui entrent dans une maille est égale à la somme des intensités qui en sortent). Donc, pour tout k, $z_k = 1 - x_k$. D'où :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + y_k \\ y_{k+1} = 2x_k + 3y_k - 1 \end{cases} \quad (avec\ x_1 = i,\ z_1 = 1 - i\ et\ y_1 = 3i - 1).$$

En posant $X_k = x_k - \frac{1}{2}$ et $Y_k = y_k$, on a $\begin{bmatrix} X_{k+1} \\ Y_{k+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \end{bmatrix}$, où $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

D'où $\begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \end{bmatrix} = M^k \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$, avec ($X_0$, Y_0) solution du système $\begin{cases} X_0 + Y_0 = i - 0,5 \\ 2X_0 + 3Y_0 = 3i - 1 \end{cases}$,

soit $X_0 = -0,5$ et $Y_0 = i$.

Détermination de M^k :

- M a pour valeurs propres $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$
- $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{bmatrix}$ est une matrice de vecteurs propres.
- $P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3-\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 3+\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$.
- On a $P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix} = J$, d'où $M^k = PJ^kP^{-1}$.

On obtient $M^k = \begin{bmatrix} a_k - b_k & b_k \\ 2b_k & a_k + b_k \end{bmatrix}$,

où $a_k = \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^k + (2-\sqrt{3})^k\right]$ et $b_k = \frac{\sqrt{3}}{6}\left[(2+\sqrt{3})^k - (2-\sqrt{3})^k\right]$.

Résolution du problème :

Pour déterminer i, on utilise $x_1 = z_n = 1 - x_n = i$, d'où :

$x_n + i = 1$, $i(b_n+1) = \frac{1}{2}(a_n - b_n + 1)$ et $i = \frac{a_n - b_n + 1}{2(b_n+1)}$.

$R_n = 2x_1 + x_2 + ... + x_n = i + x_1 + x_2 + ... + x_n$.

Or, compte tenu des relations $\begin{cases} x_k = z_{n+1-k} \\ x_k + z_k = 1 \end{cases}$ (symétrie du circuit), on a

$x_1 + x_2 + ... + x_n = \frac{n}{2}$ et donc $\boldsymbol{R_n = \frac{a_n - b_n + 1}{2(b_n+1)} + \frac{n}{2}}$.

Vérification :

Pour $n = 4$, on trouve $a_4 = 97$, d'où $i = \frac{7}{19}$ et $R_4 = \frac{45}{19}$.