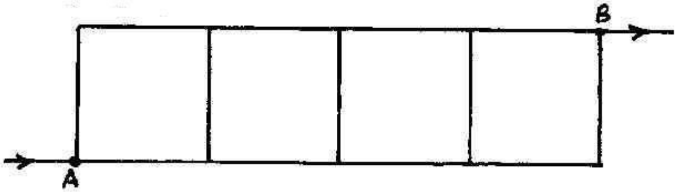
Problème du trimestre, n°38 (juin 1994)

proposé par André VIRICEL, de VILLERS-LES-NANCY

Un conducteur électrique AB est formé de 4 mailles carrées assemblées pour former une sorte d'échelle (voir schéma ci-dessous). Chacun des côtés du carré a une résistance de 1 Ω (un ohm).
Quelle est la résistance équivalente à l'ensemble ?
Peut-on généraliser pour *n* mailles ?



Envoyez vos solutions à Bernard PARZYSZ, 3 rue Marie Sautet, 57000-METZ, ainsi que toute proposition de problème pour les numéros ultérieurs.

Solution du problème n°37 (mars 1994)

Construction d'une mosquée.

Connaissant la longitude et la latitude de NANCY (6° est et 49° nord, à 1° près) et celles de LA MECQUE (40° est et 22° nord), comment doit-on construire une mosquée de façon à bien orienter le mihrab vers La Mecque (en d'autres termes, quel angle doit-il faire avec le méridien local) ?

Solution proposée par André **VIRICEL**. Sa réponse est en fait « double » : il propose non seulement une solution par la trigonométrie sphérique (méthode qui vient immédiatement à l'esprit), mais également une solution par la géométrie descriptive.

Première solution (trigonométrie sphérique) :

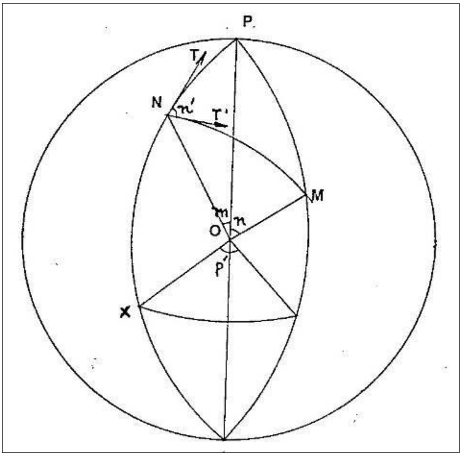
Notations : Appelons *M* (La Mecque), *N* (Nancy), *P* (pôle Nord) et *O* (centre de la Terre) les points dont nous aurons besoin, et appelons *X* l'intersection du méridien de Nancy avec l'équateur.

Posons $i = OX, k = OP, j = k \wedge i$ et considérons le repère $R = (O, i, j, k)$ [*voir figure ci-après*].

Enfin appelons, dans le triangle sphérique *MNP* :

- p la mesure de l'arc MN ("côté" du triangle) ;
- p' la mesure de l'angle dièdre des plans (*MOP*) et (*NOP*).

Nous définissons de même m, m', n et n'.



Le problème consiste donc à déterminer n'.

Dans le repère R nous avons : $N(\sin m, 0, \cos m)$ et $M(\sin n.\cos p', \sin n.\sin p', \cos n)$.

Nous en déduisons :

$$\cos p = OM.ON = \sin m.\sin n.\cos p' + \cos m.\cos n \quad (1).$$

Considérons maintenant le repère R' déduit de R par la rotation d'axe $(O;j)$ transformant P en N (donc d'angle m).

Posons $R' = (O;u,v,w)$; nous aurons bien sûr $v = j, w = ON$ et $u = v \wedge w = j \wedge ON$. Dans le repère R' les coordonnées du point M sont $M(-\sin p.\cos n', \sin p.\sin n', \cos p)$.

Or, la deuxième coordonnée de M est la même dans les deux repères, ce qui nous donne $\sin n.\sin p' = \sin p.\sin n'$ (2).

Données numériques : $m = 41°$, $n = 68°$, $p' = 34°$. De (1) on tire $\cos p \approx 0{,}78701$, d'où $\sin p \approx 0{,}61694$. En reportant dans (2) on obtient $\sin n' \approx 0{,}84040$, d'où finalement $n' \approx 122{,}82°$ (car c'est un angle obtus).

Seconde solution (géométrie descriptive) :

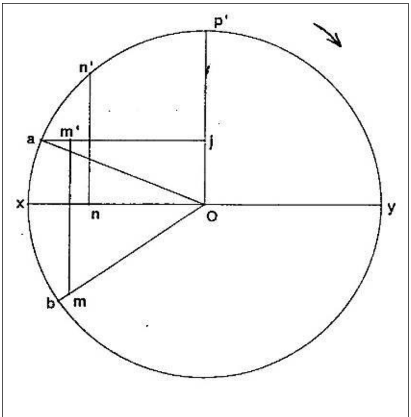


fig.1

Nous conservons ici les notations précédentes. D'autre part, nous utiliserons la convention (usuelle) suivante : un point de l'espace étant désigné par une lettre majuscule,
- son projeté horizontal sera désigné par la même lettre, minuscule ;
- son projeté frontal sera désigné par la même lettre, minuscule et primée (fig. 1).

Appelons (*xy*) la ligne de terre. Prenons comme plan horizontal le plan équatorial, et comme plan frontal le plan du méridien de Nancy. Alors, le projeté horizontal de l'équateur et le projeté frontal du méridien de Nancy ont pour support commun, sur l'épure, un même cercle (*C*) de centre *O*. Ce cercle est orienté dans le sens rétrograde, à partir de *x*

1- ***Epures de N et de P*** : Ces points sont dans le plan frontal, donc leurs projetés horizontaux *n* et *p* sont sur (*xy*). De plus, *p* est en *O* et $p' \in (C)$, et *n'* est défini par $(Ox,On) = 49°$.

2- ***Epure de M*** :

a) Projeté frontal du parallèle de *M* : soit *a* le point de (*C*) défini par $(Ox,OA) = 22°$. Le projeté frontal du parallèle de *M* (sur lequel se trouve *m'*) est un segment parallèle à (*xy*) passant par *a*. (Remarque : soit *j* le point où ce segment coupe (*OP*) ; le rayon du parallèle de *M* est égal à *aj*.)

b) Projeté horizontal du méridien de *M* : soit *b* le point de (*C*) défini par $(Ox,OB) = -34°$; le projeté horizontal du méridien de *M* est le segment [*Ob*].

c) Projeté horizontal de *M* : on a $m \in [Ob]$; d'autre part, *m* se trouve à une distance de *O* égale à *aj*, ce qui détermine ce point.

d) Projeté frontal de *M* : il suffit maintenant de "relever" *m* sur [*aj*] : la perpendiculaire à (*xy*) passant par *m* coupe [*aj*] au point *m'* cherché.

3- Remarque : l'angle que l'on cherche à évaluer est l'angle des tangentes au méridien de *N* et au grand cercle passant par *M* et *N*. Ces deux tangentes étant perpendiculaires à (*ON*), l'angle cherché se projettera en vraie grandeur sur le plan perpendiculaire en *O* à (*ON*). D'où l'idée de prendre ce plan comme nouveau plan horizontal.

4- Changement de plan horizontal : La nouvelle ligne de terre (*x'y'*) est donc la perpendiculaire en *O* à (*On'*) :

Le plan frontal étant conservé, les projetés frontaux le sont aussi ; de plus, les éloignements (distances "algébriques" au plan frontal) sont eux aussi conservés.

a) Projeté horizontal de *N* : c'est bien sûr *O*.

b) Projeté horizontal de *M* : ce point m_1, est situé :
-sur la perpendiculaire en *m'* à (*x'y'*)
-à la distance *im* de (*x'y'*) (*i* étant le projeté de *m* sur (*xy*). D'où la construction de m_1.

c) Projeté horizontal de *P* : de même que ci-dessus, ce point p_1 se trouve sur la perpendiculaire à (*x'y'*) passant par *p'*, et également sur (*x'y'*) (car l'éloignement de *P* reste nul). Le point p_1 est donc le projeté de *p'* sur (*x'y'*).

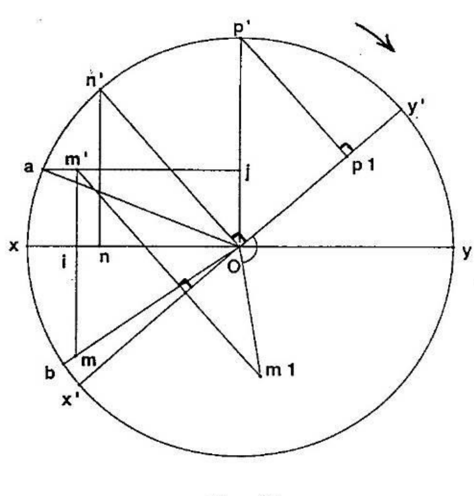


fig. 2

L'angle cherché est donc (Op_1,Om_1), qu'il ne reste plus qu'à évaluer. On trouve environ 122° (Cabri-Géomètre dixit), ce qui - à la précision du logiciel près - confirme le résultat trouvé dans l'autre solution.

★ ★ ★ ★ ★

Dernière heure : nous avons également reçu deux nouvelles solutions, l'une de Pol **LE GALL** (Lycée de ROMBAS) et l'autre de Jérôme **CARDOT** (collège de SAINT-MIHIEL), assez semblables à la première solution d'André VIRICEL.

Jérôme CARDOT précise que, pour le pèlerin qui se rend à La Mecque par le plus court chemin (c'est à dire un grand cercle de la Terre), l'angle α n'est pas constant ; il se peut qu'il doive partir vers le nord-est puis, lors de son voyage, obliquer vers l'est et enfin vers le sud-est.
Les courbes décrites à α constant joignent les pôles : au voisinage de ceux-ci, elles s'enroulent en spirale.