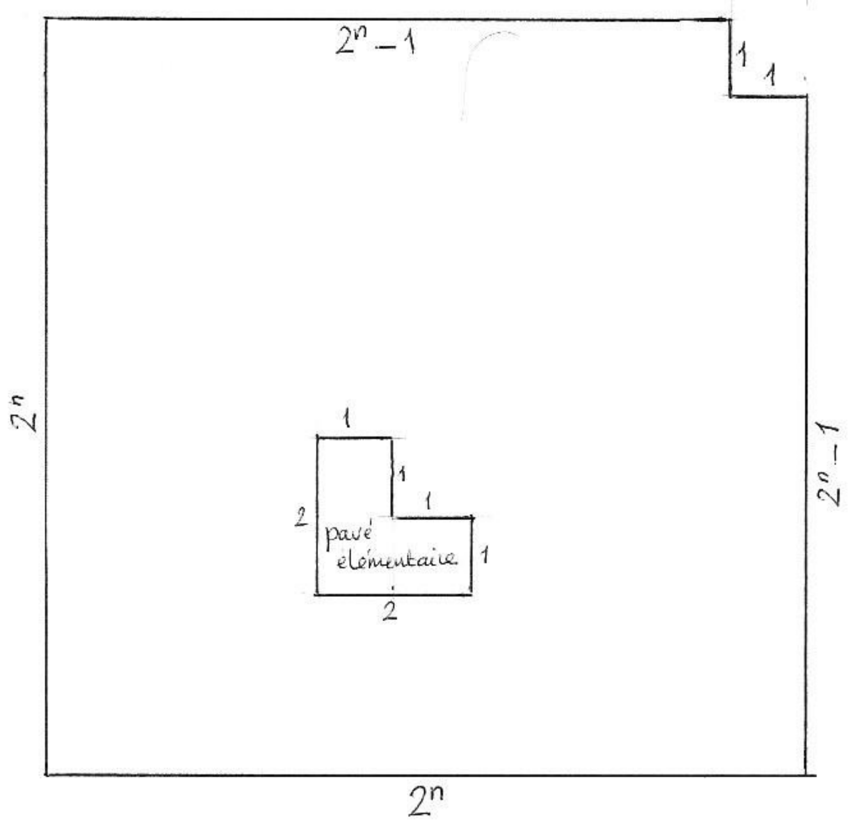
Solution du problème n°36 (PETIT VERT de décembre 1993)

proposé par Serge **PETIT** (SÉLESTAT)

Les pavés élémentaires sont des « carrés écornés » (ou « triminos ») représentés ci-dessous. La surface à paver est le « carré écorné » représenté ci-dessous.
Est-il possible de paver exactement cette surface avec les pavés élémentaires, et ceci pour tout entier *n* non nul ?

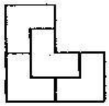


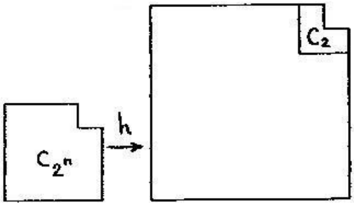
Pour ce problème, nous avons reçu des solutions de: Jérôme **CARDOT** (SAINT-MIHIEL) Jean **LAMBERT** (SAINT-MAX), Claude **PAGANO** (LA SEYNE-SUR-MER), Denis **PÉPIN** (VERDUN) et André **VIRICEL** (VILLERS-LES-NANCY).

Ces solutions, faisant appel à une récurrence, sont de deux types.
N.B. Nous noterons C_k le pavé obtenu en « écornant » d'un carré unité un carré de côté k (k entier naturel au moins égal à 2) ; le pavé élémentaire est donc C_2.

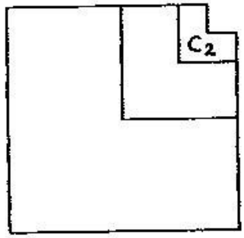
Premier type : il consiste à considérer que $C_{2^{n+1}}$ est obtenu en adjoignant C_2 à un homothétique de C_{2^n} dans le rapport 2 (voir ci-dessous).

Par ailleurs, l'homothétique de C_2 est pavable à l'aide de quatre C_2 :

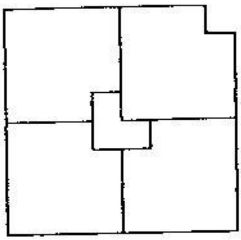




Ceci prouve que, si C_2n est pavable par C_2, il en est de même de C_2^{n+1}.
Dans une variante de ce type, en considère C_2^n comme une juxtaposition de C_2 et de ses homothétiques dans des homothéties de rapport 2^k, pour k compris



Second type : on considère cette fois que C_2n+1 résulte de l'assemblage de quatre C_2n auxquels on a adjoint C_2 « central », ce qui prouve également que, si C_2^n est pavable par C_2, il en est de même de C_2^{n+1} :

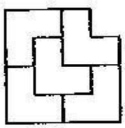


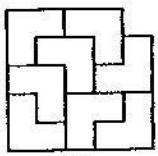
La plupart des correspondants ont proposé des **prolongements** à ce problème :

1) Extension à C_k, où k est un entier naturel quelconque ($k \geq 2$), et non plus nécessairement une puissance de 2 (J. CARDOT, C. PAGANO). En voici une démonstration :

Une condition nécessaire est que l'aire de C_k (soit k^2-1) soit un multiple de celle de C_2 (soit 3). C'est-à-dire $k^2 = 1[\text{mod. } 3]$, ou encore $k = \pm 1$ [mod. 3].
Mais cette condition est-elle suffisante ?

On vérifie sans peine que, d'après le célèbre théorème de La Palice, C_2 est pavable à l'aide de C_2 ; il en est de même de C_4 et C_5 :

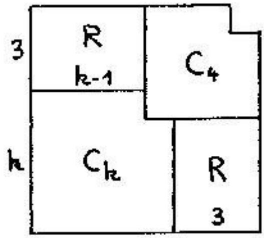

C_4


C_5

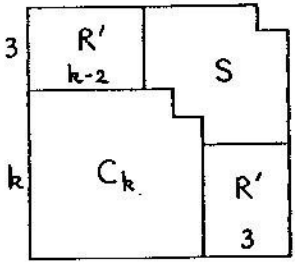
Il suffit donc de montrer que, si C_k est pavable à l'aide de C_2, il en est de même de C_{k+3}.

Distinguons deux cas, selon la parité de k :

a) <u>si k est impair</u> : décomposons C_{k+3}, comme indiqué sur la figure ci-dessous, en quatre surfaces : C_k, C_4, et deux rectangles R de $3 \times (k-1)$. L'entier k-1 étant pair, chaque rectangle R se décompose en (k-1)/2 rectangles de 3×2. Chacun de ceux-ci étant évidemment pavable par C_2 (deux pavés C_2 placés tête-bêche), il en est de même des rectangles R. D'autre part, C_4 et C_5 sont eux aussi pavables par C_2 d'où il s'ensuit que C_{k+3} est pavable exactement par C_2.



b) <u>si k est pair</u> : décomposons C_{k+3}, comme indiqué sur la figure ci-après, en quatre surfaces: C_k, deux rectangles R' de $3 \times (k-2)$, et une surface S. L'entier k-2 étant pair, chaque rectangle R' se décompose en (k-2)/2 rectangles de 3×2, et est donc pavable par C_2. Enfin, on reconnaît dans la surface S le pavé C_5, amputé (en bas à gauche) d'un pavé C_2, ce qui montre qu'elle est pavable par C_2 :

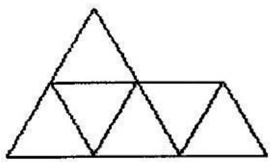


Donc, dans ce cas également C_{k+3} est pavable exactement à l'aide de C_2.

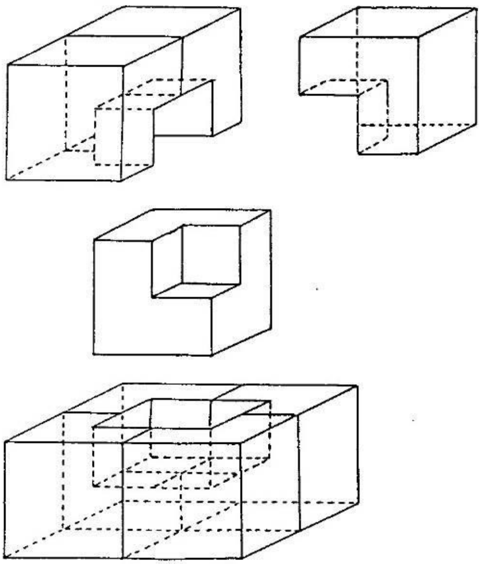
En définitive, la condition $k = \pm 1$ [mod.3] est nécessaire et suffisante, et l'on peut conclure : **C_k est pavable exactement à l'aide de C_2 si, et seulement si, k n'est pas multiple de 3.**

2) J. CARDOT envisage également le cas où le « trou » du carré C_k ne se trouve plus forcément dans un angle, mais n'importe où dans le carré. Il démontre que le pavage par C_2 est possible dès que k est différent de 5 et non multiple de 3.

3) J. LAMBERT propose un problème voisin, ayant pour figure de base un « sphinx ». Soit S_1 ce sphinx et S_n le sphinx homothétique dans le rapport n. Démontrer que l'on peut paver S_n avec S_1 :



4) Enfin, certains autres envisagent **l'extension à l'espace**, avec des « cubes écornés » (J. CARDOT, A. VIRICEL). La figure ci-dessous illustre l'adaptation, en dimension 3, de la seconde méthode utilisée dans le plan. Elle montre qu'avec neuf cubes écornés K_2^1 on peut paver un K_2^2 ; il suffit ensuite de généraliser :



(On ajoute, pour terminer, un neuvième K_2 *à l'avant dans le coin supérieur droit)*

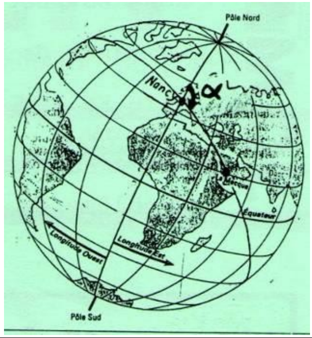
En conclusion on voit que, si les réponses ont été peu nombreuses, elles ont néanmoins permis d'élargir le problème dans des directions variées. Merci à tous !

Problème du trimestre n°37 (mars 1994)

proposé par Jacques VERDIER

Construction d'une mosquée.

Connaissant la longitude et la latitude de NANCY (6° est et 49° nord, à 1° près) et celles de LA MECQUE (40° est et 22° nord), comment doit-on construire une mosquée de façon à bien orienter le mihrab vers La Mecque (en d'autres termes, quel angle doit-il faire avec le méridien local) ?
La figure ci-contre illustre le problème : on cherche la valeur de l'angle α.



Envoyez vos solutions à Bernard PARZYSZ, 3 rue Marie Sautet, 57000 METZ, ainsi que toute proposition de problème pour les numéros ultérieurs.

ANNONCE

Je désirerais mettre en place à l'IREM, pour l'année 1994/95, un groupe de recherche sur le thème « NOUVEAUX OBJECTIFS D'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE, EN PRENANT APPUI SUR LES CALCULATRICES GRAPHIQUES ».
Il faudrait que tous ceux qui sont intéressés par ce travail de recherche (et de production de documents) me contactent, ou contactent l'IREM, et aussi qu'ils s'inscrivent au stage MAFPEN « Impact des calculatrices sur les maths au lycée » qui va paraître au prochain PAF, et qui servira de "tremplin" pour le démarrage du groupe.

Jacques VERDIER