Rosaces

Bernard Parzysz, janvier 1994

Et de leurs yeux ouverts ils regardent sans voir
La rose du vitrail toujours épanouie.
J.M. de Hérédia

Un motif très fréquent dans la partie supérieure des verrières de la cathédrale Saint-Étienne de Metz –comme d'ailleurs de beaucoup d'édifices religieux gothiques– consiste en un type de rosace que l'on peut décrire ainsi : à l'intérieur d'un grand cercle se trouvent un certain nombre de petits cercles, tangents au grand cercle et tangents « successivement » entre eux. Ces petits cercles sont interrompus par un autre cercle, concentrique au grand (*fig. 1*), mais cette dernière caractéristique n'offre qu'un intérêt géométrique anecdotique, le véritable problème étant bien entendu le suivant : comment construire, à l'intérieur d'un cercle donné (à la règle et au compas, pour rester dans l'esprit du Moyen-Âge) n cercles ($n \geq 2$) répondant aux conditions ci-dessus (*fig. 2*) ?

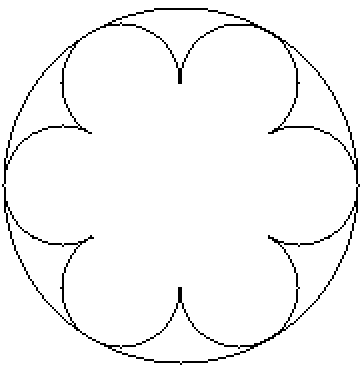


fig. 1

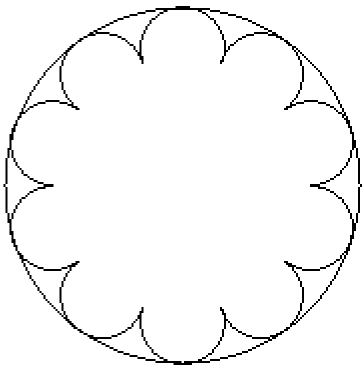


fig. 2

La première question qui se pose est celle de la construction des rayons du grand cercle (appelons-le Γ) aboutissant aux points de contact successifs A_i ($1 \leq i \leq n$) avec les petits cercles γ_i. Construction qui est possible si – et seulement si – le polygone régulier $A_1A_2 \ldots A_n$ est constructible à la règle et au compas. Cette condition équivaut à dire que $\sin(\pi/n)$ est un nombre constructible, puisque en effet le côté du polygone régulier convexe à n côtés inscrit dans un cercle de rayon unité a pour longueur $2.\sin(\pi/n)$. Rappelons qu'un nombre réel x (strictement positif) est dit constructible si, étant donné les points A et B, on peut construire à la règle et au compas le point M de (AB) d'abscisse x dans le repère $(A\,;\ \overrightarrow{AB})$[1].

Ce point étant réglé, le problème devient maintenant : les n sommets du polygone régulier convexe $A_1A_2\ldots A_n$ étant placés sur le cercle Γ de centre Ω, peut-on construire à la règle et au compas les petits cercles γ_i ?

Appelons respectivement R et r les rayons des cercles Γ et γ_i, et considérons la *fig. 3*. Le centre ω_i du cercle γ_i est situé :

- d'une part sur le rayon $[\Omega A_i]$;
- et d'autre part sur le cercle Γ' de centre Ω et de rayon $R' = R - r$.

Le problème se ramène donc à la construction du cercle Γ'. Pour ce faire, calculons R' en fonction de R et de n.

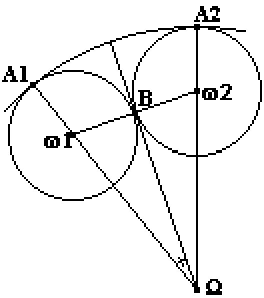


fig. 3

Soit B le point de contact des cercles γ_1 et γ_2. On a $\sin(\pi/n) = \dfrac{\omega_1 B}{\omega_1 \Omega} = \dfrac{r}{R-r}$.

D'où $r = R\dfrac{\sin(\pi/n)}{1+\sin(\pi/n)}$.

On en déduit $R' = R - r = \dfrac{R}{1+\sin(\pi/n)}$.

Or, le réel $\dfrac{1}{1+x}$ est constructible si – et seulement si – le réel x l'est. En effet :

a) si x est constructible, on peut construire un segment de longueur $\dfrac{1}{1+x}$ de la façon suivante (*fig. 4*) : soit le point M d'abscisse x de la droite (AB) repérée par $(B\,;\ \overrightarrow{AB})$. On construit sur [AB] un carré ABCD, puis on mène par B la parallèle à (MD), qui coupe (AD) en I. Le segment [AI] a la longueur cherchée.

[1] Cf. par exemple Carrega, J.-C. (1981) : *Théorie des corps. La règle et le compas*. Éd. Hermann.

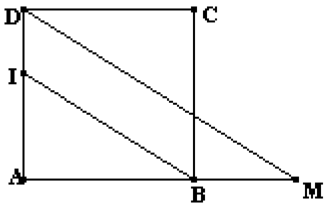


fig. 4

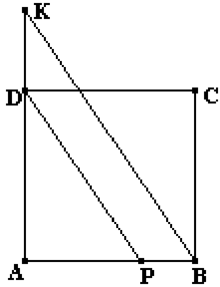


fig. 5

b) réciproquement, si $y = \dfrac{1}{1+x}$ ($y < 1$) est constructible, $x = \dfrac{y}{1-y}$ l'est aussi, par une construction analogue à la précédente (*fig. 5*) : soit le point P d'abscisse y de la droite (AB) repérée par $(A\,;\overrightarrow{AB})$. On construit sur [AB] un carré ABCD, puis on mène par B la parallèle à (DP), qui coupe (AD) en K. Le segment [DK] a la longueur cherchée.

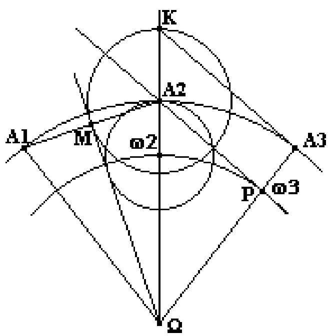
Il résulte de ceci que R' – c'est-à-dire Γ' – est constructible dès lors que $\sin(\pi/n)$ – c'est-à-dire $A_1A_2\ldots A_n$ – l'est.

Voici une construction possible de Γ'.

1° Les points A_i étant placés sur le cercle Γ, on construit le milieu M de $[A_1A_2]$ grâce à la bissectrice de $\angle A_1\Omega A_2$.

2° On trace le cercle de centre A_2 passant par M, et donc tangent à (ΩM). La droite (ΩA_2) coupe ce cercle en un point K extérieur au cercle Γ.

3° On mène par A_2 la parallèle à (KA_3), qui coupe $[\Omega A_3]$ en un point P, lequel n'est autre que le point ω_3. Le cercle Γ' est donc le cercle de centre Ω passant par P (*fig. 6*).



Justification.

On a $\angle A_1\Omega A_2 = 2\pi/n$, d'où $A_2K = MA_2 = R.\sin(\pi/n)$. On en déduit $\Omega K = \Omega A_2 + A_2K = R(1 + \sin(\pi/n))$.

Par Thalès, $\dfrac{\Omega P}{\Omega A_3} = \dfrac{\Omega A_2}{\Omega K}$, soit

$$\frac{\Omega P}{R} = \frac{R}{R(1+\sin(\pi/n))}.$$

D'où finalement $\Omega P = \dfrac{R}{1+\sin(\pi/n)} = R'$.

fig. 6

À la cathédrale de Metz, on trouve des rosaces comportant 3, 4, 5, 6 et 8 cercles intérieurs (*fig. 7*). J'ignore par quel procédé précis elles ont été construites, mais ce qui précède montre que la construction d'une telle rosace à la règle et au compas est possible pour tout entier *n* tel que l'on puisse construire, avec ces mêmes instruments, le polygone régulier à *n* côtés.

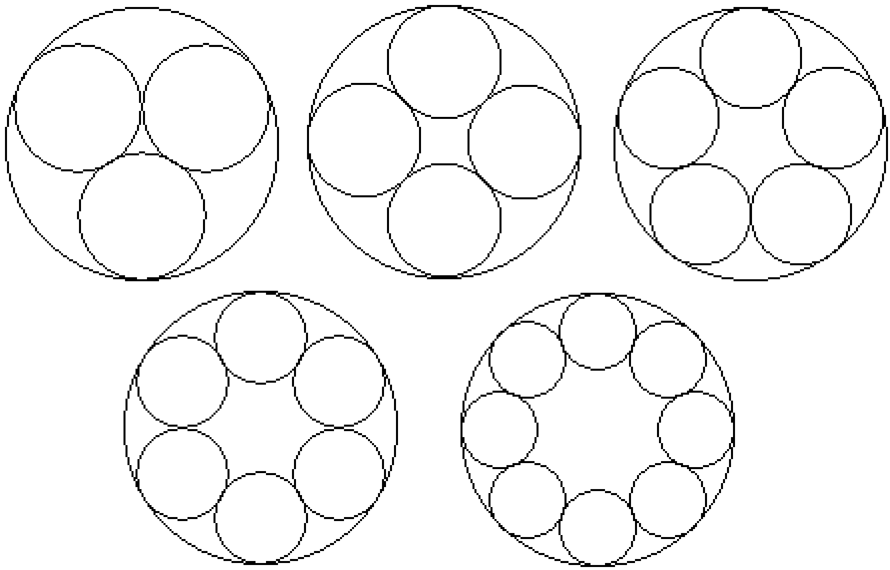


fig. 7

à suivre…