Archéologie, géométrie et algèbre

A propos d'une mosaïque découverte à Metz

Bernard Parzysz,
(nov. 1994)

Dans son édition du mercredi 9 novembre 1994, le « Républicain Lorrain » annonçait la découverte à Metz, à l'occasion d'une construction immobilière, d'une mosaïque gallo-romaine remontant probablement au deuxième siècle de notre ère. Le jeudi 17 novembre, le RL, dans un article signé Catherine Guidi, précisait qu'« *environ 17 m² de mosaïque ont été dégagés, révélant des motifs géométriques et végétaux noir et rouge sur fond blanc* », et publiait une photographie montrant un morceau de cette mosaïque *in situ*.

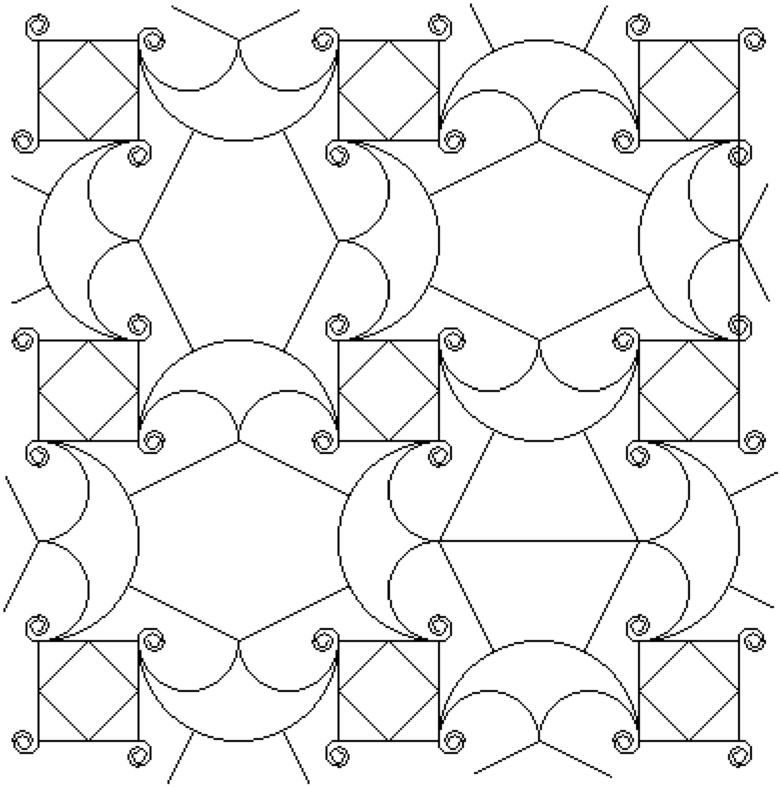

fig. 1

Ce pavement antique se présente comme sur la *fig. 1* ; on peut constater que le motif principal est bien géométrique. Les motifs « végétaux » se trouvent en fait à l'intérieur des grands losanges tronqués (*scuta*) ; ils sont apparemment – d'après la photographie – des deux types représentés sur la *fig. 2*.

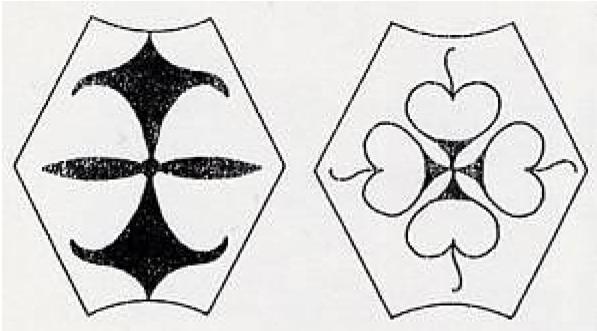

fig. 2

Mais ce qui, du point de vue mathématique, est le plus intéressant, c'est précisément l'aspect géométrique de cette mosaïque : il s'agit en effet d'un pavage régulier du plan, et nous savons qu'il existe en tout et pour tout 17 types de pavages fondés sur un motif infiniment répété, motif sur lequel opère un groupe d'isométries du plan.

L'observation du présent pavage fait apparaître des translations, des réflexions, des symétries centrales (demi-tours), des rotations d'angle droit (quarts de tour)… D'où l'idée de se demander quel est le groupe d'isométries qui se trouve à la base de cette mosaïque. Un théorème (dû à Barlow) dit qu'il n'y a que 5 types de pavage ne contenant pas de réflexions (et donc composés uniquement de rotations et de translations) ; comme ce n'est pas le cas de notre mosaïque, nous nous trouvons en présence de l'un des 12 autres types.

La présence de rotations d'un quart de tour et la consultation de la liste des 12 types de pavage (par exemple dans [Budden 1976] pp. 536-543) ne nous offre plus qu'une seule possibilité : *il s'agit du groupe engendré par une réflexion et un quart de tour*.

Remarque. On peut être intrigué par le fait qu'il n'y ait ni demi-tour, ni translation parmi les générateurs. Pour ce qui est des demi-tours, on voit immédiatement qu'on les obtient en composant deux quarts de tour, mais pour les translations ?

Considérons donc une réflexion s d'axe D et un quart de tour r (direct, pour fixer les idées), de centre O non situé sur D (*fig. 3*). Nous avons, bien entendu, $s \circ s = i$ (identité du plan), et, comme nous venons de le remarquer, $r \circ r = S_O$ (demi-tour de centre O). En nous référant aux notations de la *fig. 3* et en notant s_k la réflexion par rapport à la droite notée k ($k = 1, 2, \ldots, 5$), nous avons également : $r \circ s = s_2 \circ s_1 \circ s = s_2 \circ t_{2\overrightarrow{IO}}$, d'où : $s \circ r \circ s = s \circ s_2 \circ t_{2\overrightarrow{IO}} = s_2 \circ s_5 \circ t_{2\overrightarrow{IO}}$, et

finalement $r \circ s \circ r \circ s = s_3 \circ s_2 \circ s_2 \circ s_5 \circ t_{2\overrightarrow{IO}} = s_3 \circ s_5 \circ t_{2\overrightarrow{IO}} = t_{2\overrightarrow{KI}} \circ t_{2\overrightarrow{IO}} = t_{2\overrightarrow{KO}}$.

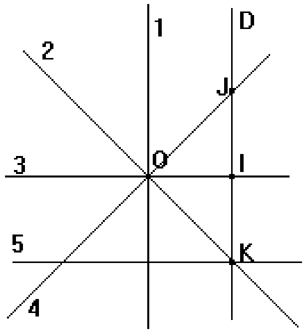

fig. 3

On a donc $(r \circ s)^2 = t_{2\overrightarrow{KO}}$.

De même, on démontre que $(s \circ r)^2 = t_{2\overrightarrow{OJ}}$.

Et, par composition de ces deux résultats :

$(r \circ s \circ r)^2 = t_{2\overrightarrow{KO}} \circ t_{2\overrightarrow{OJ}} = t_{2\overrightarrow{KJ}} = t_{4\overrightarrow{IJ}}$.

On obtient de même $t_{4\overrightarrow{OI}}$, par exemple à partir de $t_{2\overrightarrow{OJ}} \circ t_{2\overrightarrow{OK}}$.

Nous trouvons donc bien des translations comme éléments du groupe, translations dont les vecteurs sont colinéaires aux côtés et aux diagonales des carrés de base

Bien entendu, il n'y a pas unicité de la paire d'isométries engendrant ce groupe : ainsi, nous pouvons prendre comme centre de la rotation le centre de n'importe quel carré du motif ; et, en ce qui concerne la réflexion, tout axe de symétrie d'un losange tronqué conviendra également.

Il reste alors à déterminer une *région fondamentale*, c'est-à-dire une portion de plan contenant une partie du motif qui, lorsqu'on fera opérer sur elle le groupe d'isométries défini ci-dessus, engendrera le pavage du plan et la mosaïque.

Il n'y a pas non plus unicité d'une telle région, même à une isométrie près. On peut par exemple prendre celle qui est représentée sur la *fig. 4a*, où O est le centre du quart de tour générateur et (BC) l'axe de la réflexion génératrice.

Elle est constituée d'un « double carré » BCDF auquel est accolé un petit carré OAFE (AF = ½FB). La partie du motif intérieure à cette région comprend (en appelant I et L les milieux respectifs de [BC] et [DF] :

- la diagonale [AE] du petit carré
- le segment [IJ], où J est le milieu de [BF]
- le segment [IK], où K est le milieu de [DL]
- le demi-cercle (c) de diamètre [BC] intérieur à la région
- le cercle (C) de diamètre [IL].

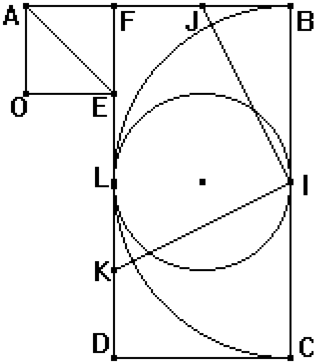

fig. 4a

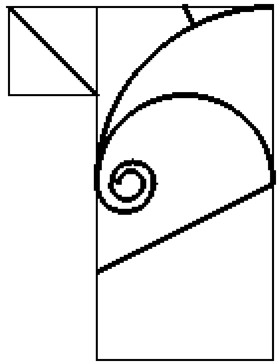

fig. 4b

(On constate ainsi que le motif se construit facilement à la règle et au compas.)

Certaines parties de ce motif sont ensuite effacées ; ce sont :

- la partie de [IJ] intérieure au cercle (C)
- les parties de cercles (C) et (c) intérieures au carré CDLI.

Enfin, une spirale est ajoutée en L, et on obtient alors la *fig. 4b*.

Sur la *fig. 5* est représentée l'orbite de cette région fondamentale par action du sous-groupe des puissances de r (constitué de i, r, r^2 et r^3), orbite soumise ensuite à l'action du sous-groupe des puissances de s (qui se réduit à i et s).

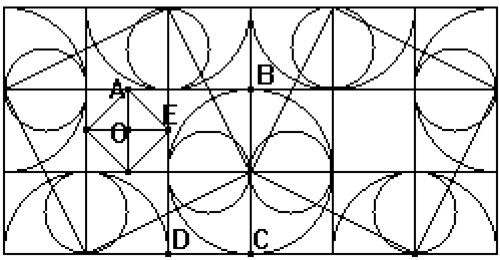

fig. 5

Si maintenant on fait de nouveau agir les puissances de r sur l'ensemble précédent, on obtient la *fig. 6*, et on voit qu'on remplit ainsi progressivement tout le plan (mais ce n'est là qu'une possibilité de progression parmi d'autres).

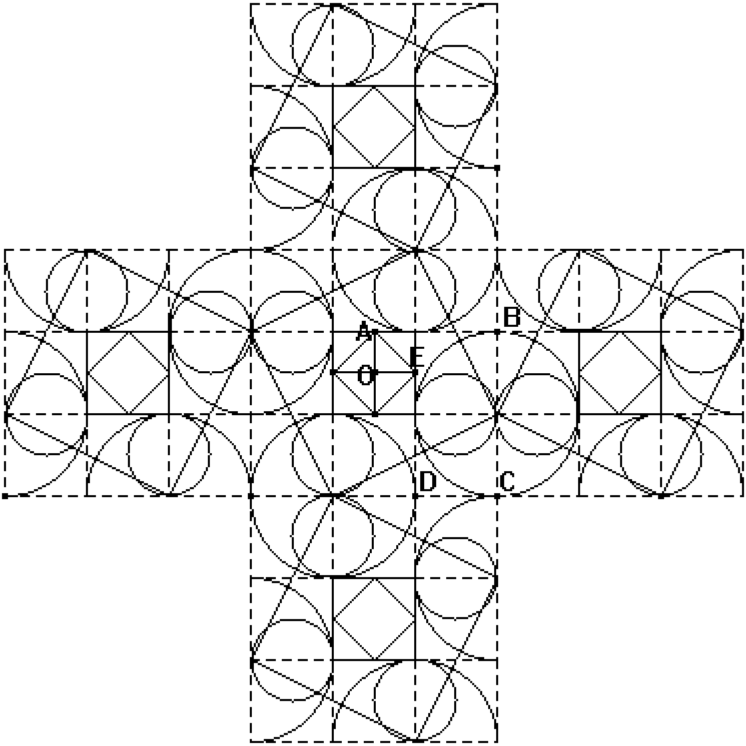

fig. 6

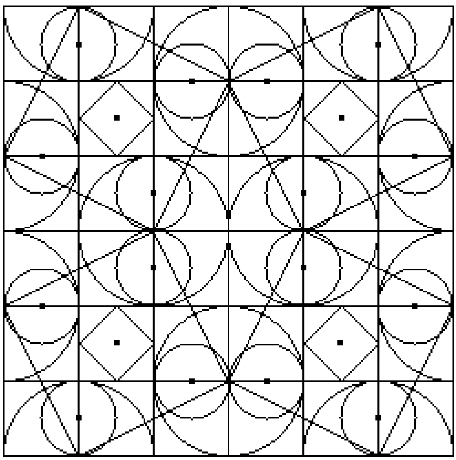

fig. 7

Cependant, les auteurs de cette mosaïque n'ont certainement pas eu la même approche. On peut penser que la réalisation du schéma directeur ne s'est pas appuyée sur la recherche d'un motif minimal, mais plutôt sur un réseau à mailles carrées, et un motif de base –réalisé à la règle et au compas– obtenu par exemple à partir d'un carré constitué de 6×6 carrés élémentaires, comme sur la *fig. 7*.

On avait alors le dessin définitif après :

1° *itération* de la même opération, après translations de vecteur 4OI et de vecteur 4OJ (mises en évidence plus haut), c'est-à-dire de 6 carreaux selon les deux directions du maillage ; 2° *effacement* de certains traits ;

3° adjonction des petits *motifs spiralés* (volutes) aux extrémités des peltes ;

4° dessin d'un *motif* à l'intérieur des losanges tronqués.

N.B. Il était également possible de partir d'un rectangle de 3×6 carrés élémentaires, complété par symétrie.

Quoi qu'il en soit, la réalisation du canevas d'une telle œuvre, à laquelle le qualificatif de « géométrique » pourrait donner une connotation péjorative, n'allait pas de soi et nécessitait un savoir-faire certain. Peut-on alors imaginer que les mosaïstes de l'époque disposaient d'un répertoire de modèles (sous forme de carnets, comme ceux de Villard de Honnecourt ?) reproduisant un certain nombre de types de pavages géométriques, et dans lequel ils pouvaient puiser, introduisant éventuellement des variantes dans le motif original ? C'est une question à laquelle seuls les archéologues pourraient répondre…

Bibliographie

Budden, F.J. (1976) : *La fascination des groupes*. Ed. OCDL, Paris.