Rosaces (3)

Suite des numéros précédents

Bernard PARZYSZ

Un autre type de remplage – c'est le terme technique – des verrières de la cathédrale de Metz apparaît digne d'intérêt : c'est celui de la *fig. 14*, qui coiffe en particulier les verrières des bas-côtés de la nef.

N.B. Les trois cercles qui figurent dans ce remplage sont agrémentés chacun de 6 arcs de cercle qui leur sont tangents intérieurement, comme décrit plus haut dans le présent article, arcs de cercle qui ne seront pas représentés ici.

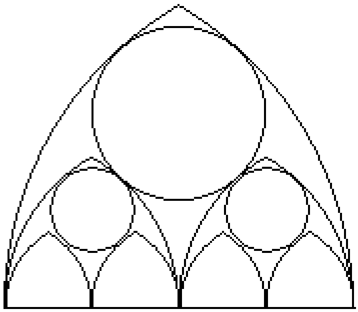


fig. 14

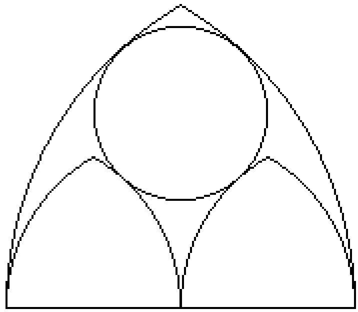


fig. 15

Le motif sur la base duquel est construite la *fig. 14* est constitué (*fig. 15*) d'une ogive en tiers-point à l'intérieur de laquelle sont placées deux ogives du même type et de taille moitié, ayant même base, tangentes entre elles et tangentes à la grande ogive. Enfin, un cercle est tangent intérieurement aux côtés de la grande ogive et extérieurement aux côtés des petites ogives qui sont les plus proches de l'axe de la configuration. On pourrait d'ailleurs décrire ce motif plus simplement comme dérivé du motif étudié plus haut, les deux petits demi-cercles étant ici remplacés par deux ogives.

Ce motif est fréquent dans les églises gothiques ; on le trouve en particulier à Amiens et à Reims. Sa réalisation est nettement plus simple que celle des deux motifs précédemment étudiés, comme nous allons le voir. Au départ, on trouve le tracé des ogives, qui n'offre aucune difficulté, puisqu'il s'agit en fait de la classique construction au compas du triangle équilatéral [1]. Reste celle du cercle tangent aux 4 arcs de cercle.

[1] On la trouve en particulier dans le premier livre des *Éléments* d'Euclide (proposition 1).

Commençons donc par nommer les éléments dont nous aurons besoin (*fig. 16*).

[AB] la base de la grande ogive et S son sommet
I le milieu de [AB]
s et s' les sommets des deux petites ogives
C (resp. C') le cercle support de l'arc AS (resp. BS)
γ le cercle support des arcs As et Bs'
γ_1 (resp. γ_2) le cercle support de l'arc Is (resp. Is')

Les cercles C et $\gamma 2$ sont centrés en B, les cercles C' et γ_1 sont centrés en A, le cercle γ est centré en I.

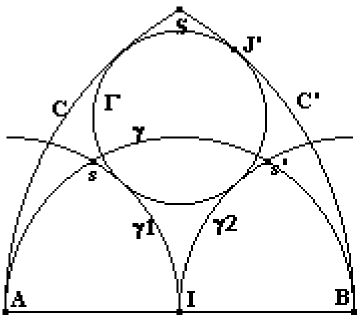


fig. 16

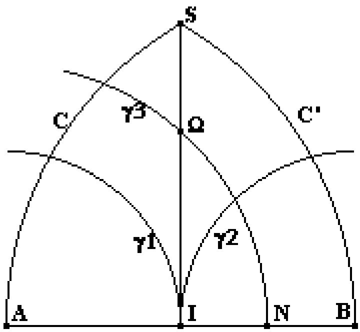


fig. 17

Il s'agit donc de construire un cercle Γ tangent intérieurement aux cercles C et C', et extérieurement aux cercles γ_1 et γ_2. Ou encore, en tenant compte de la symétrie de la figure, de construire le cercle Γ tangent intérieurement à C' et extérieurement à γ_1 (par exemple), et de plus centré sur [IS]. Si nous ne tenons par compte de cette dernière contrainte, et en remarquant que C' et γ_1 sont concentriques, le lieu du centre Ω du cercle Γ est le cercle γ_3 de centre A passant par le milieu N de [IB]. Le point Ω peut donc être obtenu comme intersection de ce cercle avec [IS] (*fig. 17*).

Remarquons d'ailleurs que **la figure peut aisément être construite au compas seul**, sur la donnée du segment [IN] (*fig. 18*).

1° On détermine d'abord le symétrique B de I par rapport à N (« demi-hexagone » inscrit dans le cercle de centre N passant par I (*fig. 19*), puis de même le symétrique A de B par rapport à I et le symétrique M de N par rapport à I.

2° On construit ensuite les cercles C (de centre B, passant par A) et C' (de centre A, passant par B), qui fournissent les côtés de la grande ogive.

3° On trace les cercles γ (de centre I, passant par A) et γ_1 (de centre A, passant par I), et symétriquement le cercle γ_2 qui donnent les côtés des deux petites ogives.

4° On trace enfin les cercles auxiliaires γ_3 (de centre A, passant par N) et γ_4 (de centre B, passant par M), dont l'intersection fournit le centre Ω du cercle cherché. Quant au rayon de ce cercle, il est égal à IN, ce qui permet d'achever la construction de Γ.

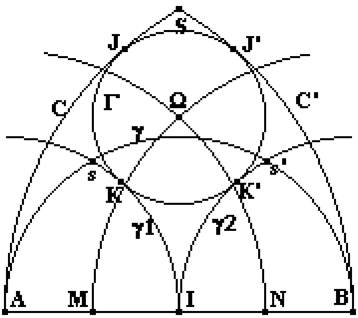


fig. 18

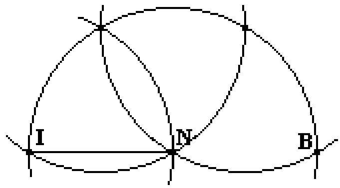


fig. 19

Remarquons au passage que, d'après la *fig. 18*, les points de contact de Γ avec les cercles C' et γ_1 (soit respectivement J' et K) sont alignés sur (AΩ) et que, symétriquement, les points de contact de Γ avec les cercles C et γ_2 (soit respectivement J et K') sont alignés sur (BΩ).

Cependant, la facilité d'exécution de cette figure n'est pas, à mon avis, son principal mérite. Comme on peut le constater sur la *fig. 14*, ce motif apparaît trois fois en grand dans l'ogive principale, et aussi deux fois à l'échelle ½. En effet, on passe du grand motif à l'un des petits par une homothétie de rapport ½ et de centre A ou B, selon le cas.

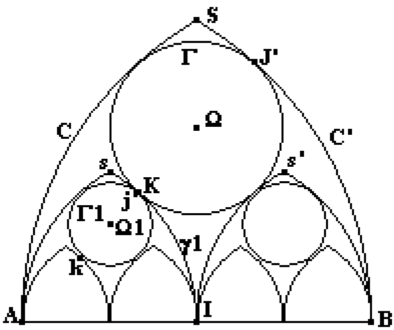


fig. 20

Soit maintenant le cercle Γ_1, analogue de Γ dans la petite ogive de base [AI]. Appelons Ω_1 son centre, et j' et k les points de contact respectifs de Γ_1 avec les cercles analogues de C' et γ_1 (*fig. 20*). Ces points sont les images respectives de J' et K dans l'homothétie de centre A et de rapport ½, donc j' = K. Ce qui démontre en outre l'alignement des 6 points A, Ω, J', K, Ω_1 et k.

Allons plus loin… La présence des 4 petites ogives « vides » de la fig. 14 suggère l'idée d'une itération du processus suivant (*fig. 21*). Partant d'une ogive vide (niveau 0), on la transforme en le motif de la *fig. 15* (niveau 1), et on itère ensuite le même processus *ad libitum*.

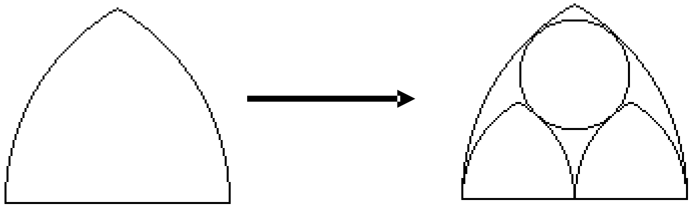


fig. 21

On obtient ainsi une courbe qui peut être parcourue sans lever le crayon. En effet, prenons par exemple la figure de niveau 2, qui n'est autre que celle du remplage des verrières de Metz (*fig. 22*).

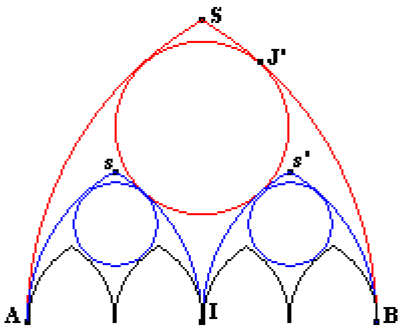


fig. 22

Partant du point A, on peut décrire (en rouge) l'arc AS, puis l'arc SJ', puis le cercle Γ (retour en J'), puis l'arc J'B. On décrit ensuite successivement (en bleu), de façon analogue mais dans l'autre sens, les deux ogives Bs'I et IsA avec leurs cercles inscrits. On est alors prêt à repartir dans le sens initial le long des 4 ogives inférieures, et l'on voit ainsi que ce trajet peut se poursuivre indéfiniment.

…/…

Quelle est la longueur de cette courbe ?

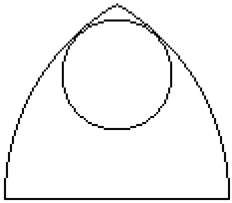
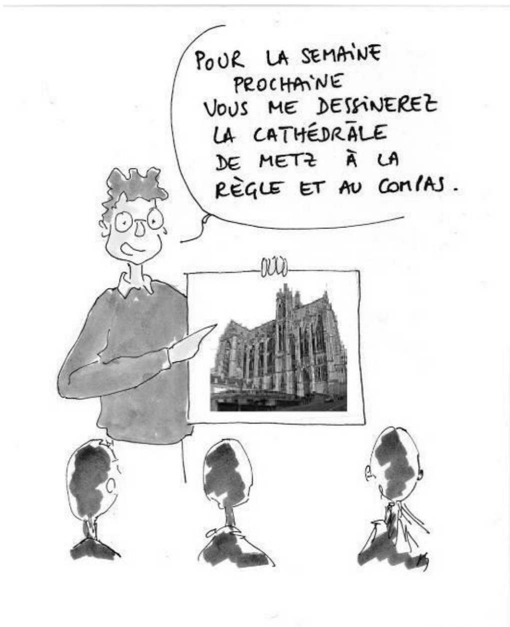


fig. 23

Considérons le motif « ogive + cercle » (*fig. 23*). Il est réalisé une fois au niveau 1, deux fois (mais à l'échelle moitié) au niveau 2, … et 2^{n-1} fois (à l'échelle$2^{-(n-1)}$ au niveau n. Puisqu'au niveau n on ajoute 2^{n-1} motifs dont la longueur est 2^{n-1} fois plus petite que celle du motif initial, on ajoute à chaque niveau une longueur égale à celle du motif de départ. Ce qui signifie qu'au niveau n on a déjà n fois la longueur du motif initial, et donc que la longueur de la courbe est infinie.

Les bâtisseurs des cathédrales gothiques ont-ils eu l'intention, par l'utilisation de ce motif, de suggérer l'idée de l'infini divin ? Il serait téméraire de l'affirmer, mais il n'en demeure pas moins que cette figure médiévale, aisément constructible au compas seul et consistant en la reproduction à différentes échelles d'un même élément de base, peut passer à juste titre pour un lointain ancêtre des courbes fractales.



(dessin de Pol Le Gall)