

Rosaces (2)

Suite du numéro précédent

Bernard PARZYSZ

Il est un autre motif de rosace fréquent à la cathédrale de Metz, qui est celui que représente la *fig. 8* : il est constitué d'une ogive en tiers-point sur la base de laquelle s'appuient deux demi-cercles de même rayon, tangents chacun à l'un des côtés de l'ogive et tangents entre eux. Dans le « vide » restant est placé un cercle tangent à ces deux cercles, ainsi qu'aux côtés de l'ogive. Le problème, cette fois, est celui de la détermination de ce dernier cercle.

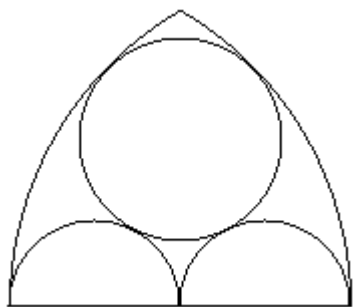


fig. 8

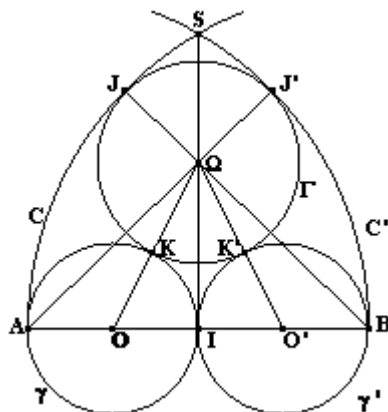


fig. 9

Pour fixer les idées (*fig. 9*), appelons :

$[AB]$ le segment inférieur,

C et C' les cercles supports des côtés de l'ogive, de centres respectifs A et B , et passant respectivement par B et A ,

γ et γ' les cercles supports des demi-cercles inférieurs, de centres respectifs O et O' , passant respectivement par A et B et tangents entre eux en I , milieu de $[AB]$,

S le sommet de l'ogive,

Γ le cercle cherché, tangent aux cercles C , C' , γ et γ' respectivement aux points J , J' , K et K' .

Ω le centre du cercle Γ et r son rayon.

Prenons OA comme unité de longueur. On a, d'après Pythagore :

$O\Omega^2 - OI^2 = B\Omega^2 - BI^2 (= I\Omega^2)$, soit $(1+r)^2 - 1^2 = (4-r)^2 - 2^2$. D'où l'on tire $r = 6/5$.

Pour construire le point Ω , cherchons sa distance à des points particuliers de la figure. La relation ci-dessus nous fournit $I\Omega = \sqrt{6}/5$, d'où l'on déduit (Pythagore dans les triangles ΩIA et ΩIO) que $A\Omega = 14/5$ et $O\Omega = 11/5$.

On peut bien sûr, sans problème, obtenir à la règle et au compas un segment de longueur $14/5$ ou $11/5$ à partir de la donnée d'un segment unité (partage d'un segment en 5 parties égales), mais dans le cas qui nous occupe ici cette construction ne serait pas très élégante. Essayons donc autre chose.

On peut remarquer que l'on a $\Omega A + \Omega O = (14/5) + (11/5) = 5$, ce qui signifie que le point Ω appartient à une ellipse de foyers A et O. Cette ellipse passe par O', puisque $O'A + O'O = 3 + 2 = 5$. Mais, puisque $\Omega B = \Omega A$, on a également $\Omega B + \Omega O = 5 (= AB + AO)$. Donc le point Ω appartient aussi à l'ellipse de foyers B et O passant par A.

Finalement, en tenant compte des symétries, on peut dire que le point Ω appartient à 4 ellipses :

E_1 : ellipse de foyers A et O passant par O' ;

E_2 : ellipse de foyers B et O passant par A ;

E_3 : ellipse de foyers B et O' passant par O ;

E_4 : ellipse de foyers A et O' passant par B.

D'autre part, puisque Ω appartient également à la médiatrice (IS) de [AB], le tracé d'une seule de ces ellipses suffit (fig. 10).

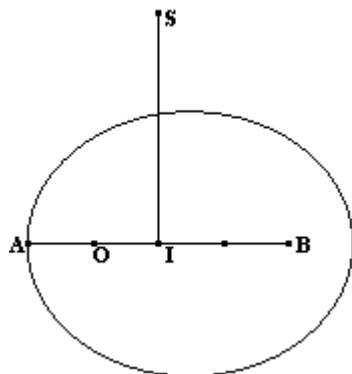


fig. 10

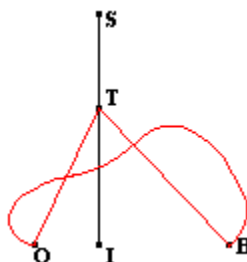


fig. 11

Le tracé au sol d'une telle ellipse était aisé pour les compagnons du Moyen-âge, grâce à la « méthode du cordeau ». Qui plus est, il n'était même pas

nécessaire, dans le cas qui nous occupe ici, de tracer effectivement cette ellipse. Il suffisait, une fois fixées les extrémités d'une corde de longueur 5 aux points B et O (par exemple), de tendre cette corde à l'aide d'une pointe à tracer se déplaçant sur (IS) de I vers S : la position de la pointe pour laquelle la corde était tendue donnait le point Ω cherché (fig. 11).

On peut à ce propos faire deux remarques :

a) Cette manœuvre constitue une application en acte du théorème des valeurs intermédiaires. En effet, si l'on appelle T la position de la pointe à tracer sur [IS], la somme des distances de T aux points B et O est une fonction f de la distance $x = IT$, continue (on a $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 4}$), qui passe de la valeur 3 pour $x = 0$ (T en I) à la valeur $4 + \sqrt{13}$ pour $x = 2\sqrt{3}$ (T en S). Elle prend donc une fois –et une seule, puisqu'elle est strictement croissante– la valeur 5 sur l'intervalle $[0 ; 2\sqrt{3}]$.

b) Elle fournit, non seulement le centre du cercle Γ , mais aussi le point de contact K de ce cercle avec le cercle γ : c'est le point où ce dernier est coupé par la partie [O Ω] de la corde.

Pour résumer, disons que l'ensemble de la figure peut être construit entièrement à l'aide d'un cordeau sur lequel sont placés 6 nœuds (dont un à chaque extrémité) le partageant en 5 segments égaux. Nous noterons 0, 1, 2, 3, 4, 5 ces 6 nœuds (fig. 12).

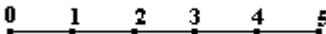


fig. 12

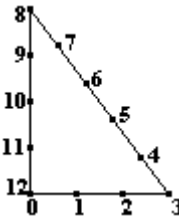


fig. 13

1° En tendant le cordeau, on détermine les points A (nœud 0), O (nœud 1), O' (nœud 3) et B (nœud 4).

2° On fixe le nœud 0 (extrémité du cordeau) en B, et on détermine le cercle C comme lieu du nœud 4 (cordeau tendu) ; symétriquement par rapport à (IS), on détermine le cercle C', ce qui fournit le point S et le segment [IS].

3° On fixe le nœud 0 en O, et on détermine de façon analogue le cercle γ comme lieu du nœud 1 ; symétriquement, on détermine le cercle γ' .

4° On fixe le nœud en O et le nœud 5 en B. Puis, selon la méthode indiquée plus haut, on détermine les points Ω et K.

Il ne reste plus alors qu'à tracer le cercle Γ cherché (cercle de centre Ω passant par K).

Est-ce là la procédure effectivement utilisée par les compagnons bâtisseurs ? Je l'ignore, mais pour l'imaginer j'ai songé à la « corde à 13 nœuds », héritée dit-on des anciens Égyptiens, et qui leur permettait entre autres, sans outillage encombrant de type équerre ou même compas, de déterminer ou de vérifier une perpendicularité, grâce à la construction d'un triangle 3-4-5 (le fameux « triangle égyptien »). L'objet utilisé est un cordeau divisé en 12 par 13 nœuds équidistants, en comptant les extrémités. Détaillons l'une des utilisations de cet instrument, en l'occurrence la suivante (nous numérotions les nœuds de 0 à 12, de manière analogue à ce qui a été fait plus haut.

Il s'agit de déterminer la perpendiculaire à une droite donnée Δ en un point donné A de cette droite. Pour cela :

1° On fixe en A les deux extrémités du cordeau (nœuds 0 et 12), et on tend celui-ci le long de Δ .

2° On fixe alors le nœud 3 au point B où il se trouve.

3° Il suffit alors de saisir le cordeau par le nœud 8 et de le tendre (*fig. 13*) ; le point C où se situe alors ce nœud est tel que la droite (AC) est perpendiculaire à Δ .

On le voit, les utilisations des deux cordeaux sont très similaires. Il s'agit dans les deux cas de tendre le cordeau, après fixation de certains nœuds en des points déterminés. La méthode décrite plus haut pour la construction de la rosace n'est bien sûr qu'une conjecture, mais cette façon de procéder est, me semble-t-il, bien dans l'esprit des bâtisseurs de l'époque.

