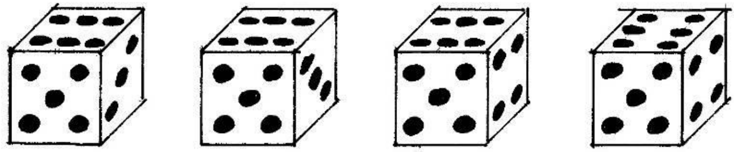
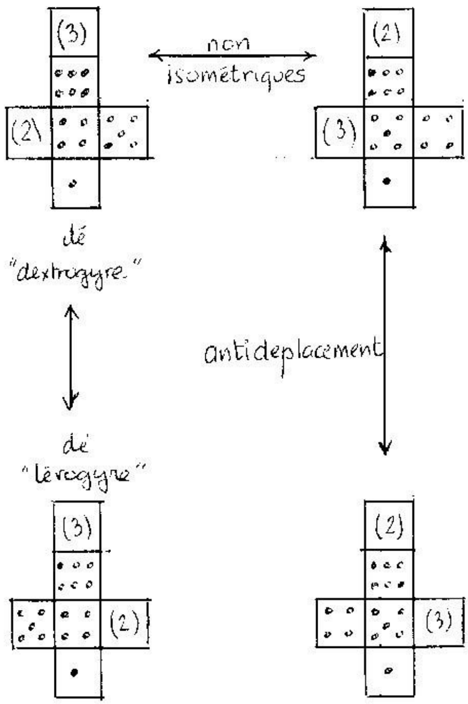
Solution du problème n°35 (PETIT VERT de septembre 1993) proposé par le **Comité Régional**

Voici quatre dés « réglementaires » (au sens que la somme de deux faces opposées vaut toujours 7) et pourtant tous différents (c'est-à-dire non-isométriques quant à la disposition des points sur les faces).



COMBIEN de dés « réglementaires » différents existe-t-il ?

Beaucoup de solutions reçues pour ce problème : Richard **BECZKOWSKI** (CHALON-SUR-SAÔNE), Jérôme **CARDOT** (SAINT-MIHIEL), François **DROUIN** (SAINT-MIHIEL), Jean **LAMBERT** (SAINT-MAX), Claude **PAGANO** (LA SEYNE SUR MER), Dorin **POPOVICI** (PONT À MOUSSON), Jacques **VERDIER** (NANCY).



Il y a deux sortes de dés, qui se correspondent par antidéplacement (à une symétrie dans un miroir) ; à l'instar des cristaux en chimie, nommons-les dés ***dextrogyres*** et dés ***lévogyres***.
Sur le schéma ci-dessus, les deux patrons supérieurs correspondent à des dés qui ne se correspondent pas par une isométrie (à cause de la face 6).
Si on observe les faces, certaines ont les symétries du carré : (1), (4) et (5). Chacune d'elle est opposée à une face n'ayant que deux axes de symétrie : faces (6), (3) et (2).
Il y a deux façons d'orienter le trièdre (1)-(4)-(5) [correspondant aux dés dextrogyres et lévogyres] et, pour chacune des trois autres faces, deux façons de l'orienter : soit en tout **16 combinaisons différentes.**

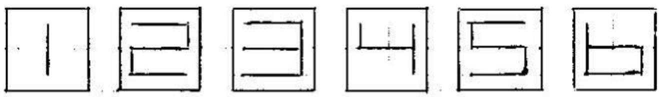
J. Lambert a remarqué que dans des jeux achetés dans le commerce et contenant plusieurs dés, tous ces dés n'étaient pas nécessairement de même type.
J. Verdier, en fouillant tous les tiroirs de sa maison, a trouvé 13 sortes de dés différents ... il lui en manque 3 pour que sa collection soit complète !

Jérôme Cardot propose les deux **prolongements** suivants :

1°) Prolongement à d'autres dés (non cubiques) :
En remarquant que pour *p* points marqués sur un face à *n* côtés, il n'y a qu'une seule orientation possible si *p* est divisible par *n*, ou si le reste de la division est 1.
Si *n* est premier (en particulier *n* = 3 ou *n* = 5), il y a *n* orientations possibles.

2°) On colle sur les faces d'un "Rubik's Cube" soit des petits carrés blancs, soit des petits carrés blancs marqués d'un point noir, pour former l'un des 16 dés solution du problème.
Peut-on alors, par les mouvements du Rubik's Cube, obtenir un autre des 16 dés ? peut-on obtenir les 15 autres ?
Y a-t-il des "classes" de dés accessibles les uns à partir des autres par les transformations du Rubik's Cube ?

J. Verdier propose le prolongement suivant : au lieu de marquer les faces par des points, marquons-les par les chiffres arabes 1, 2, 3, 4, 5, 6 (où seul 3 admet un axe de symétrie) tels qu'on les obtient en affichage digital :



Combien y a-t-il alors de dés différents ?
Et avec les chiffres romains I, II, III, IV, V et VI ?

Autres solutions au problème n°34 (PETIT VERT de juin 1993)

proposé par Jean-Marie **DIDRY** (VANDOEUVRE LES NANCY)

L'énoncé suivant est un « classique » de terminale : par tout point M du « petit » arc AB du cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC, MA + MB = MC.
Plus généralement, démontrer que pour tout point M du « petit » arc A_1A_2 du cercle circonscrit à un polygone réguler $A_1A_2A_3 \ldots A_{2n+1}$ on a : $MA_1 + MA_2 = \sum_{k=3}^{2n+1} (-1)^{k+1}\ MA_k$

Nous avons reçu deux autres solutions à ce problème, qui nous sont parvenues au moment où les épreuves du PETIT VERT étaient déjà parties à l'impression. L'une d'elles, de Vincent LECUYER (Lycée Varoquaux de Tomblaine) que nous publions intégralement plus bas, l'autre de Pol LE GALL (lycée J. Daubié de Rombas) que nous résumons ici :

Pol **LE GALL** utilise un repère du plan complexe dans lequel les affixes des sommets du polygone sont les racines nièmes de l'unité, et où l'affixe de M est $e^{i\theta}$.
Ce qu'il faut démonter équivaut à la nullité de S = $MA_1 - MA_2 + ... - MA_{2k} + MA_{2k+1}$.

Or $MA_j = \left| e^{\frac{2ij\pi}{2n+1}} - e^{i\theta} \right|$ d'où l'on tire $MA_j = 2\sin\left(\frac{\pi j}{2k+1} - \frac{\theta}{2}\right)$.

D'où $S = 2\cos\frac{\theta}{2}\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^{j+1}\sin\left(\frac{\pi j}{2k+1}\right) - 2\sin\frac{\theta}{2}\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^{j+1}\cos\left(\frac{\pi j}{2k+1}\right)$.

En considérant $S_1 = \sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^{j+1}\cos\left(\frac{\pi j}{2k+1}\right)$ et $S_2 = \sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^{j+1}\sin\left(\frac{\pi j}{2k+1}\right)$, et en calculant $S_1 + iS_2$, on trouve 0, d'où $S_1 = S_2 = 0$, d'où S = 0, c.q.f.d.

Voici la solution de Vincent **LÉCUYER** :

L'idée est d'utiliser un second polygone régulier $M_1M_2...M_{2n+1}$ dont l'un des sommets est M, et de même cercle circonscrit que le polygone $A_1A_2...A_{2n+1}$.
On prouve ensuite que les distances MA_k sont les normes de vecteurs de la forme M_pA_q colinéaires entre eux et de somme nulle ; la colinéarité et une définition angulaire de l'orientation relative de ces vecteurs colinéaires permettent d'en déduire la relation métrique cherchée.

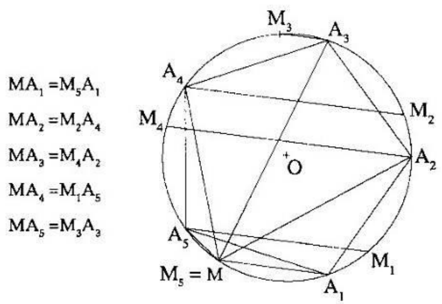


Schéma de la démonstration sur l'exemple du pentagone :

A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 ont le même isobarycentre O, donc

$$OA_1 + OA_2 + OA_3 + OA_4 + OA_5 = OM_1 + OM_2 + OM_3 + OM_4 + OM_5$$

,

puis $M_5A_1 + M_2A_4 + M_4A_2 + M_1A_5 + M_3A_3 = 0$,

d'où $M_5A_1 - M_2A_4 + M_4A_2 - M_1A_5 + M_3A_3 = 0$,

soit $MA_1 - MA_2 + MA_3 - MA_4 + MA_5 = 0$

et enfin : $MA_1 + MA_5 = MA_2 - MA_3 + MA_4$.

En premier lieu, les points A_k de l'énoncé initial ont été renumérotés pour simplifier les notations : le point M sera un point de $[A_1A_{2n+1}]$ et non pas de $[A_1A_2]$ (*comme sur l'exemple du pentagone ci-dessus, n.d.l.r.*). En outre, quitte à échanger A_k et A_{2n+2-k} pour tout k compris entre 1 et n (c'est à dire $A_1 \leftrightarrow A_{2n+1}$, $A_2 \leftrightarrow A_{2n}$, ... $A_n \leftrightarrow An+_2$), on supposera que M ≠ A, soit en fait $M \in]A_1A_{2n+1}[$ sans perte de généralité.

Une convention (***C***) s'imposera plus loin pour alléger les écritures : les indices seront toujours implicitement ramenés par congruence dans {1, ..., 2n+1}, c'est à dire $A_k = A_{k'} \Leftrightarrow k = k'$ [modulo 2n+1].

Soit O l'isobarycentre du polygone $A_1A_2...A_{2n+1}$ et $\boldsymbol{r}$ la rotation de centre O qui envoie A_1 sur A_2. D'une part on a $\boldsymbol{r}^k(A_1) = A_{k+1}$, et plus généralement $\boldsymbol{r}^p(A_q) = A_{p+q}$, et d'autre part, si l'on pose $M_k = \boldsymbol{r}^k(M)$, le polygone $M_1M_2...M_{2n+1}$ est globalement l'image de $A_1A_2...A_{2n+1}$ par la rotation $\boldsymbol{\rho}$ de centre O qui transforme A en M : en effet, $M_k = \boldsymbol{r}^k(M) = \boldsymbol{r}^k \mathrm{o} \boldsymbol{\rho}(A_1) = \rho(A_{k+1})$, compte tenu de la convention (***C***).

① Orientons le plan de sorte que $\left(OA_1, OA_2\right) = \dfrac{2\pi}{2n+1}$.

Alors $\left(MA_1, MA_k\right) = \dfrac{(k-1)\pi}{2n+1}[\text{mod } 2\pi]$ puisque c'est l'angle de $\boldsymbol{r}^{k+1}$.

On pose $u = \dfrac{MA_1}{MA_1}$ (on a supposé $M \neq A_1$).

② Si k est pair, notons k = 2k' ; k' ∈ {1, ... n}.
On a $\boldsymbol{r}^{n+1-k'}(M) = M_{n+1-k'}$ et $\boldsymbol{r}^{n+1-k'}(A_{2k'}) = A_{n+1-k'}$
donc

$(MA_{2k'}, M_{n+1-k'}A_{n+1+k'}) = \dfrac{(n+1-k')2\pi}{2n+1}[\text{mod } 2\pi]$, et $MA_{2k'} = M_{n+1-k'}A_{n+1+k'}$,

soit, d'après ①, $(MA_1, M_{n+1-k'}A_{n+1+k'}) = \dfrac{(2n+2-2k'+2k'-1)\pi}{2n+1} = \pi[\text{mod } 2\pi]$,

d'où $(u, M_{n+1-k'}A_{n+1+k'}) = \pi[\text{mod } 2\pi]$,

ou encore $M_{n+1-k'}A_{n+1+k'} = -M_{n+1-k'}A_{n+1+k'}.u = -MA_{2k'}u$

③ Si k est impair, notons k = 2k'+1 ; k' ∈ {0, ... n}.
On a $\boldsymbol{r}^{2n+1-k'}(M) = M_{2n+1-k'}$ et $\boldsymbol{r}^{2n+1-k'}(A_{2k'+1}) = A_{2n+2-k'}$
donc

$(MA_{2k'+1}, M_{2n+1-k'}A_{2n+2-k'}) = \dfrac{(2n+1-k')2\pi}{2n+1}[\text{mod } 2\pi]$, et $MA_{2k'+1} = M_{2n+1-k'}A_{2n+2+k'}$,

soit, d'après ①, $(MA_1, M_{2n+2-k'}A_{2n+2-k'}) = \dfrac{(4n+2-2k'+2k')\pi}{2n+1} = 0\ [\text{mod } 2\pi]$,

d'où $(u, M_{2n+1-k'}A_{2n+2-k'}) = 0\ [\text{mod } 2\pi]$,

ou encore $M_{2n+1-k'}A_{2n+2-k'} = +M_{2n+1-k'}A_{2n+2-k'}.u = +MA_{2k'+1}.u$

④ Sachant que O est isobarycentre des deux polygones, on peut écrire :

$$\sum_{k'=1}^{n} M_{n+1-k'}A_{n+1+k'} + \sum_{k'=0}^{n} M_{2n+1-k'}A_{2n+2+k'} = \sum_{k'=1}^{n} M_{n+1-k'}A_{n+1+k'} + \sum_{k'=0}^{n} M_{2n+1-k'}A_{k'+1}$$

$$= \left[\sum_{k'=1}^{n} OA_{n+1+k'} + \sum_{k'=0}^{n} OA_{k'+1}\right] - \left[\sum_{k'=1}^{n} OM_{n+1-k'} + \sum_{k'=0}^{n} OM_{2n+1-k'}\right]$$

$$= \left[\sum_{p=n+2}^{2n+1} OA_p + \sum_{p=1}^{n+1} OA_p\right] - \left[\sum_{p=1}^{n} OM_p + \sum_{p=n+1}^{2n+1} OM_p\right] = \sum_{p=1}^{2n+1} OA_p - \sum_{p=1}^{2n+1} OM_p = 0 .$$

Soit, en substituant les relations obtenues en ② et ③ :

$$\sum_{k=1}^{n} MA_{2k+1}.u - \sum_{k=0}^{n} MA_{2k}.u = 0$$ et, puisque $u \neq 0$,

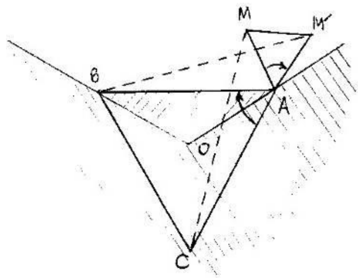
$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} (-1)^{k+1} MA_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} (-1)^{k+1} MA_k = 0$$, d'où finalement $\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} MA_k = 0$

ou, de manière équivalente : $\boxed{MA_1 + MA_{2n+1} = \sum_{k=2}^{2n} (-1)^{k+1} MA_k}$

Par ailleurs, nous avons reçu de Dorin POPOVICI, du lycée Mazelet de PONT À MOUSSON, la démonstration de la propriété réciproque dans le cas du triangle équilatéral (n = 3) :

Tout point M d'un triangle équilatéral ABC qui satisfait la relation
MA + MB = MC (*R*)
se trouve sur le « petit » arc AB du cercle circonscrit au triangle ABC.

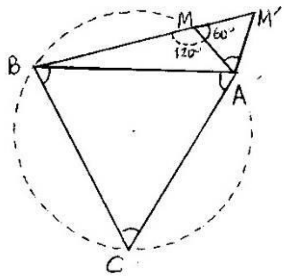
La relation (***R***) implique que MA $\leq$ MC et MB $\leq$ MC, ce qui signifie que la médiatrice (OB) sépare les points M et C, et que la médiatrice (OA) sépare les points M et C. Donc M se trouve dans l'intérieur ou sur les côtés de l'angle $\widehat{AOB}$.



En effet, si M se trouvait dans l'intérieur du triangle OBA, on aurait :
MA + MB $>$ AB = BC = AC $>$ MC, donc (***R***) ne serait pas vérifiée.
Et si M était sur (OA) ou sur (OB), M serait respectivement A ou B.

On suppose dorénavant que M se trouve dans l'intérieur de l'angle $\widehat{AOB}$, séparé de C par la droite (AB). On considère la rotation de centre A qui transforme C en B et M en M'. Alors BM' = MC et MM' = MA. La relation (***R***) devient BM + MM' = BM', condition qui est réalisée si et seulement si les points B, M et M' se trouvent alignés dans cet ordre.

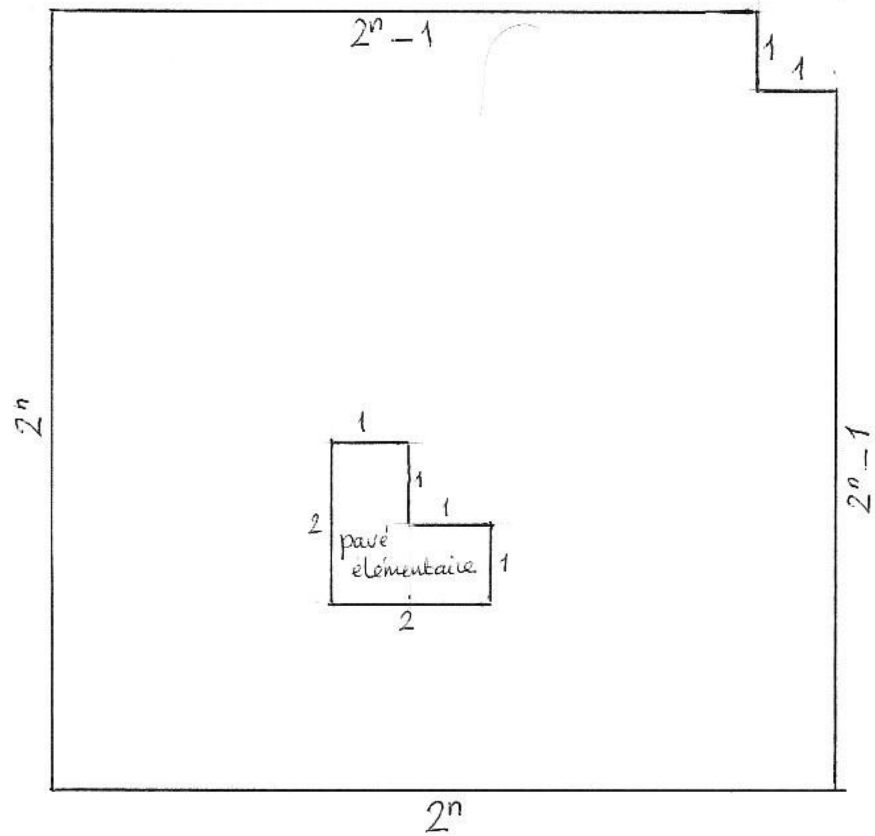
Comme $\widehat{AMM'} = 60°$, on obtient $\widehat{AMB} = 120°$, et le quadrilatère AMBC est donc inscriptible. Cette assertion est équivalent au fait que M se trouve sur le « petit » arc AB du cercle circonscrit au triangle ABC (points B et C exclus).



Corollaire : le cercle circonscrit à un triangle équilatéral est l'ensemble des points de son plan dont la somme des distances à deux sommets est égale à la distance au troisième.

Problème n°36 (PETIT VERT de décembre 1993)
proposé par Serge **PETIT** (SÉLESTAT)

Les pavés élémentaires sont des « carrés écornés » (ou « triminos ») représentés ci-dessous. La surface à paver est le « carré écorné » représenté ci-dessous.
Est-il possible de paver exactement cette surface avec les pavés élémentaires, et ceci pour tout entier *n* non nul ?



Vos réponses aux problèmes du PETIT VERT, ainsi que vos propositions de problèmes, sont à faire parvenir à Bernard PARZYSZ, 3 rue Marie Sautet, 57000 METZ.