

# Un problème posé par FERMAT à TORRICELLI

Par Jean-Marie DIDRY

Soit A, B, C des points deux à deux distincts d'un plan euclidien.

La fonction  $f$  définie dans ce plan par  $f(M) = MA + MB + MC$  admet-elle un minimum et en quel(s) point(s) ?

La réponse à cette question est bien connue :

**Cas (1) :** si l'un des trois angles de la figure vaut au moins  $120^\circ$ , par exemple  $BAC$ ,  $f(M) > f(A)$  pour tout point  $M$  du plan distinct de  $A$ .

**Cas (2) :** sinon,  $f(M) > f(T)$  pour tout point  $M$  distinct de  $T$ , point de TORRICELLI du triangle  $ABC$  (définition de  $T$  et propriétés en annexe).

Une solution de ce problème consiste à mettre en évidence une ligne brisée d'extrémités fixes et de longueur  $f(M)$  (pour une rédaction détaillée, voir par exemple : Yvonne et René SORTAIS, *La géométrie du triangle*, Éd. Hermann).

Dans un article paru dans l'Ouvert n° 53, Jacques DAUTREVAUX utilise le théorème de PTOLÉMÉE pour traiter le cas (2) ; le cas (1) y est également examiné en détail.

D'autres points de départ (dans le cas (2)) sont recensés dans : Ross HONSBARGER, *Joyaux mathématiques*, vol. 1, Cédic. On y trouve en particulier la solution donnée par TORRICELLI qui s'appuie sur le théorème de VIVIANI (la somme des distances d'un point  $M$  intérieur à un triangle équilatéral à ses côtés. est constante).

La solution exposée ici utilise l'inégalité suivante :

Soient  $O$  et  $N$  deux points distincts. Alors, pour tout point  $M$  du plan,

$$MO - NO \leq MN. \quad \frac{NO}{NO},$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si  $M$  appartient à la demi-droite  $[ON)$ .

En effet, pour  $N \neq O$  :

$$MN. \frac{NO}{NO} = (MO \oslash N). \quad \frac{NO}{NO} = MO. \frac{NO}{NO} - NO = \begin{cases} MO - NO & \text{si } M \oslash \\ MO \cos \angle MON - NO & \text{si } M \not\oslash \end{cases}$$

## Preuve du cas (1) :

Partons des inégalités  $MB - AB \geq MA. \frac{AB}{AB}$  et  $MC - AC \geq MA. \frac{AC}{AC}$ .

Si  $A \in [BC] \setminus \{B, C\}$ ,  $\frac{AB}{AB} + \frac{AC}{AC} = 0$  et donc  $f(M) \geq MA + f(A)$ .

Si  $A \notin [B, C]$ , l'hypothèse sur  $BAC$  montre que  $A \notin (BC)$  et ainsi  $[BA) \cap [CA) = \{A\}$ . Pour  $M \neq A$ , l'une des deux inégalités de départ est stricte, de sorte que :

$$f(M) - f(A) > MA - MA \cdot \left( \frac{AB}{AB} + \frac{AC}{AC} \right)$$

$$\text{Mais } \cos BAC \leq -\frac{1}{2}, \text{ d'où } \left\| \frac{AB}{AB} + \frac{AC}{AC} \right\| \leq 1 \text{ et } MA \cdot \left( \frac{AB}{AB} + \frac{AC}{AC} \right) \leq MA.$$

### Preuve du cas (2) :

Le point de TORRICELLI du triangle (voir définition et propriétés en annexe) est alors strictement intérieur au triangle et vérifie  $ATB = BTC = CTA \neq 20^\circ$ .

$$\text{D'où : } \left\| \frac{TA}{TA} + \frac{TB}{TB} + \frac{TC}{TC} \right\|^2 = 3 + 2(\cos ATB + \cos BTC + \cos CTA) = 0.$$

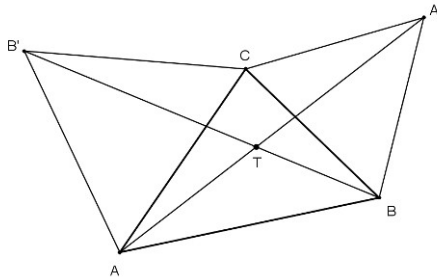
Puisque  $[AT] \cap [BT] \cap [CT] = \{T\}$ , pour  $M$  distinct de  $T$ , l'une des inégalités  $MA + TA \geq MT \cdot \frac{TA}{TA}$ ,  $MB + TB \geq MT \cdot \frac{TB}{TB}$ ,  $MC + TC \geq MT \cdot \frac{TC}{TC}$  est stricte, et ainsi

$$f(M) - f(T) > MT \cdot \left( \frac{TA}{TA} + \frac{TB}{TB} + \frac{TC}{TC} \right).$$

Le second membre de cette dernière inégalité étant nul, (2) est établi.

### ANNEXE : Point de TORRICELLI d'un triangle ABC

Soit  $ABC$  un triangle,  $A'$  le point séparé de  $A$  par  $(BC)$  et tel que le triangle  $BA'C$  soit équilatéral,  $B'$  le point séparé de  $B$  par  $(AC)$  et tel que le triangle  $CB'A$  soit équilatéral :



Par rotation de centre  $C$  et d'angle  $(CB, CA')$ ,  $B$  a pour image  $A'$ , et  $B'$  a pour image  $A$ .

Donc  $(B'B, AA') = (CB, CA')$ . Ainsi les droites  $(AA')$  et  $(BB')$  sont sécantes.

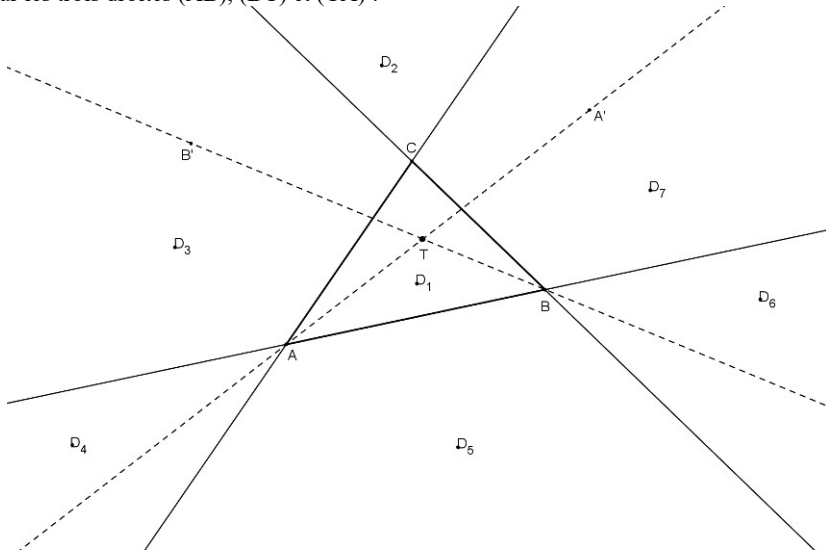
Nous appellerons point de TORRICELLI du triangle  $ABC$  ce point d'intersection, et nous le noterons  $T$ .

Supposons désormais que les trois angles du triangle  $ABC$  soient strictement inférieurs à  $120^\circ$ . Dans ces conditions :

- (1)  $T$  est strictement intérieur au triangle  $ABC$  ;
- (2)  $BTC = CTA = ATB = 120^\circ$
- (3)  $TA + TB + TC = AA'$

**Preuve de (1) :**

Notons  $D_1, D_2, \dots, D_7$  les sept domaines convexes du plan (frontières comprises) définis par les trois droites  $(AB)$ ,  $(BC)$  et  $(CA)$  :



Les hypothèses de séparation faites sur  $A$  et  $A'$ ,  $B$  et  $B'$  et les hypothèses sur les angles du triangle  $ABC$  assurent que  $T$  n'est pas sur les côtés du triangle  $ABC$  et que  $(AA') \subset D_1 \cup D_4 \cup D_7$  et que  $(BB') \subset D_1 \cup D_3 \cup D_6$ .  
Donc  $T$  est élément de  $D_1$ , et situé à l'intérieur du triangle.

**Preuve de (2) :**

Il résulte en particulier de (1) que  $T \in [A, A'] \setminus \{A, A'\}$  et que  $T \in [B, B'] \setminus \{B, B'\}$ .

Donc  $(TB, TA') = (B' B, AA') = (CB, CA')$ .

Ainsi  $T$  est sur le cercle circonscrit au triangle équilatéral  $CBA'$  et, puisqu'il est séparé de  $A'$  par  $(BC)$ ,  $\angle CTB = 120^\circ$ .

De même  $\angle CTA = 120^\circ$  et donc aussi  $\angle ATB = 120^\circ$ .

**Preuve de (3) :**

La médiatrice de  $[CA']$  sépare  $C$  et  $A'$  et passe par  $B$  : elle sépare donc aussi  $T$  et  $A'$ , de sorte que  $TA' > TC$ .

Il existe donc alors, entre  $T$  et  $A'$ , un unique point  $T'$  tel que le triangle  $TT'C$  soit équilatéral.

La rotation de centre  $C$  qui envoie  $B$  sur  $A'$  envoie  $T$  sur  $T'$ . Donc  $TB = T'A'$ .

D'où :  $TA + TB + TC = AT + TA' + TT = AA'$ .

■