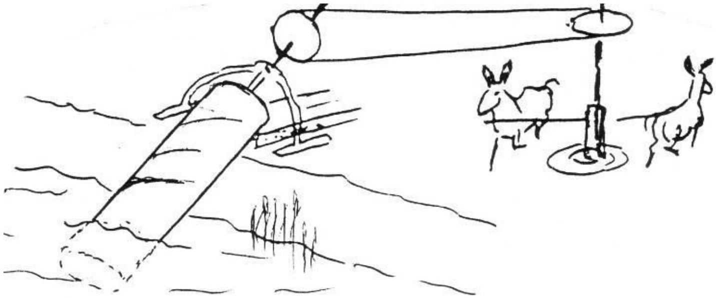
Hélice et vis d'Archimède

par André Viricel
(Villers les Nancy)

Merci à Michel Véry,
du lycée Arthur Varoquaux,
qui a réalisé les dessins
techniques avec le logiciel
"Mathematica".

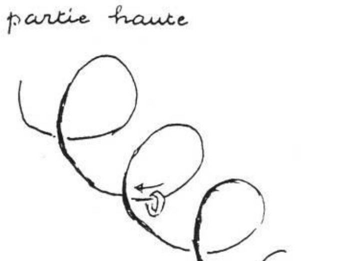
Faire passer de l'eau à un niveau plus élevé a toujours été un problème pour les gens des latitudes inférieures à 40°.
Archimède (287-212 avant J.-C.) a donné la solution suivante, appelée maintenant VIS D'ARCHIMEDE.



Un cylindre, dont l'axe est oblique, contient une cloison hélicoïdale. Il trempe dans l'eau à sa partie inférieure. On le fait tourner, et l'eau monte à sa partie supérieure. Une petite expérience nous permet de comprendre le pourquoi de cette ascension.

L'expérience

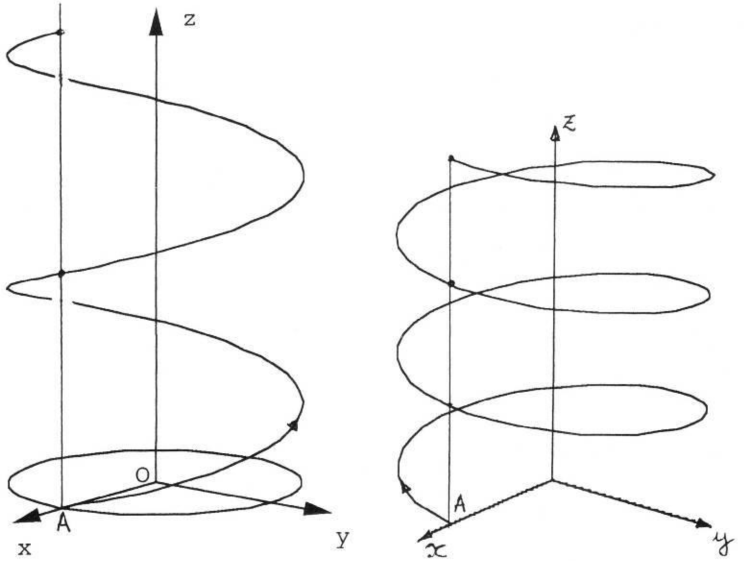
Sur un manche à balai cylindrique, on enroule un fil de cuivre (dans le sens indiqué par la figure). On retire l'hélice obtenue de son support, et on fait tourner le cylindre dans le sens indiqué :



L'anneau, qui n'écoute que la pesanteur, descend l'arc sur lequel il est posé, donc va vers notre gauche.
Mais (miracle !) il s'éloigne de nous et va donc vers le haut. Il grimpe spire après spire jusqu'à sa libération quand il atteint le bord supérieur du cylindre (qui n'est pas, remarquez-le, le point le plus haut de l'ensemble).

Le dessin en perspective

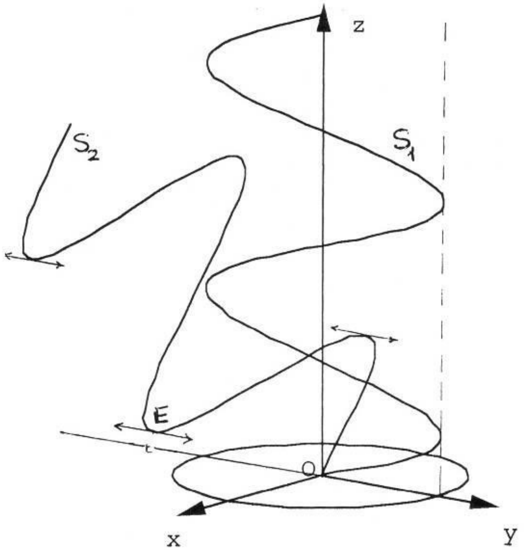
Voici, dessinées, deux hélices. Ici, le point A se déplace dans le sens des aiguilles d'une montre :



On fait basculer la figure (cylindre porteur et hélice) autour de AA' d'un certain angle α (ici 45°).
Dans le plan YOZ on peut voir :

- la projection de l'hélice, qui est une sinusoïde (S_1),
- la projection de l'hélice obtenue après basculement de la précédente, qui est aussi une sinusoïde (S_2)

Ce dessin suffit à faire comprendre où sont les points de l'hélice à tangente horizontale (en E par exemple) :



Un point matériel M (soumis à la pesanteur) astreint à rester sur l'hélice s'arrête donc à ce point E.
Quand le cylindre porteur tourne, la sinusoïde (S_1) "monte" suivant la direction OZ, et la sinusoïde (S_2) glisse entre deux parallèles. Le point E suit la sinusoïde (S_2) dans son mouvement de translation : le point E monte le long d'une génératrice.
Jusqu'où ?
Jusqu'au point où cette génératrice rencontre le bord supérieur du cylindre.

Écrivons quelques équations

Un point M(x,y,z) du cylindre vertical de rayon r se projette en m sur le plan horizontal XOY ; soit t l'angle (OX,Om) ; soit p le pas de l'hélice.

L'équation de l'hélice est donc : $$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = \dfrac{pt}{2\pi} \end{cases}$$

On cherche maintenant la nouvelle équation de la courbe, après rotation d'angle α autour de OX :

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\cos\alpha\sin t - pt\sin\dfrac{\alpha}{2\pi} \\ z = r\sin\alpha\sin t + pt\sin\dfrac{\alpha}{2\pi} \end{cases}$$

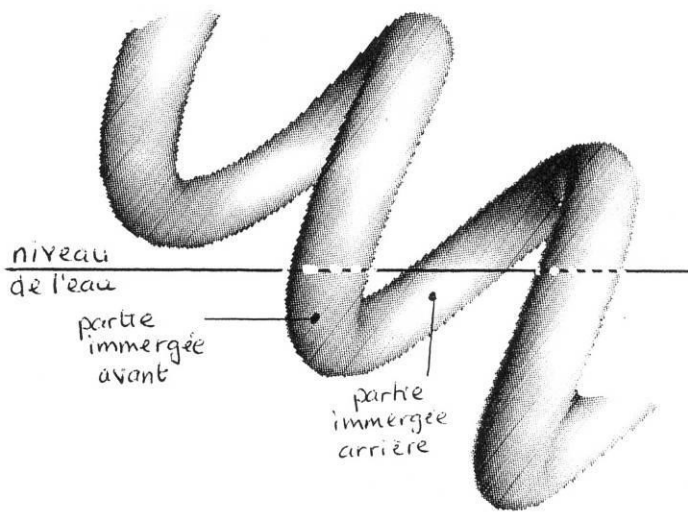
Il importe de savoir les points où la tangente est horizontale :

$\dfrac{dz}{dt} = r\sin\alpha\cos t + p\cos\dfrac{\alpha}{2\pi}$, qui s'annule pour $\cos t = -\dfrac{p\cos\alpha}{2\pi r\sin\alpha}$;

on remarque qu'on n'a de solutions que si $p < 2\pi r\tan\alpha$ (c'est à dire si le pas de l'hélice n'est pas trop grand par rapport au rayon).
Dans le cas d'une inclinaison à 45*, les points à tangente horizontale correspondent à $\cos t = -\dfrac{p}{2\pi r}$.

Avec un tuyau

Voici à quoi cela correspond lorsque l'hélice est un véritable tuyau, et non plus filiforme ; et rien n'empêche de mettre plusieurs tuyaux accolés, pour y gagner en efficacité :



Ci-dessus, l'hélice d'Archimède (à l'intérieur du cylindre porteur).
En page de couverture, le tuyau enroulé autour se son cylindre porteur

■