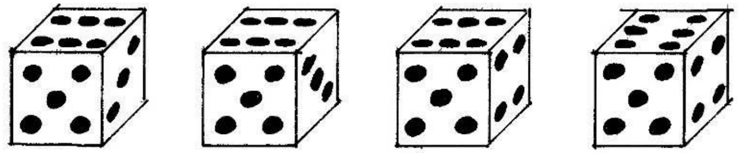
Problème du trimestre n°35
proposé par le **Comité Régional**

Voici quatre dés « réglementaires » (au sens que la somme de deux faces opposées vaut toujours 7) et pourtant tous différents (c'est-à-dire non-isométriques quant à la disposition des points sur les faces).



COMBIEN de dés « réglementaires » différents existe-t-il ?

Solution du problème n°34 (PETIT VERT de juin 1993)
proposé par Jean-Marie **DIDRY** (VANDOEUVRE LES NANCY)

L'énoncé suivant est un « classique » de terminale : par tout point M du « petit » arc AB du cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC, MA + MB = MC.
Plus généralement, démontrer que pour tout point M du « petit » arc $\overset{\frown}{A_1A_2}$ du cercle circonscrit à un polygone réguler $A_1A_2A_3... A_{2n+1}$ on a : $MA_1 + MA_2 = \sum_{k=3}^{2n+1} (-1)^{k+1}\, MA_k$

Une première solution, proposée par l'auteur :

Pour tout k de 3 à 2n+1, utilisons le théorème de PTOLÉMÉE dans le quadrilatère inscrit $MA_2A_kA_1$:

$MA_k \times A_kA_k = MA_1 \times A_2A_k + MA_2 \times A_1A_k$. D'où :

$$A_1A_2 \times \sum_{k=3}^{2n+1} (-1)^{k+1}\, MA_k =$$

$$MA_1 \times A_2A_3 + MA_1 \times \sum_{k=4}^{2n+1} (-1)^{k+1}\, A_2A_k + MA_2 \times \sum_{k=3}^{2n} (-1)^{k+1}\, A_1A_k + MA_2 \times A_1A_{2n+1}$$

Pour des raisons de symétrie, $A_2A_3 = A_2A_1$ et $\sum_{k=4}^{2n+1} (-1)^{k+1} .A_2A_k = 0$,

ainsi que $A_1A_{2n+1} = A_1A_2$ et $\sum_{k=3}^{2n} (-1)^{k+1} .A_1A_k = 0$. D'où le résultat annoncé.

Remarque d'André VIRICEL : en « translatant » de (-2) les indices des sommets du polygone, le résultat prend la forme suivante, plus « symétrique » :

> Pour tout point M du petit arc A_0A_{2n} du cercle circonscrit au polygone régulier $A_0A_1...A_{2n}$, on a : $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k.MA_k = 0$

Cette forme se prête bien sur à une solution trigonométrique :

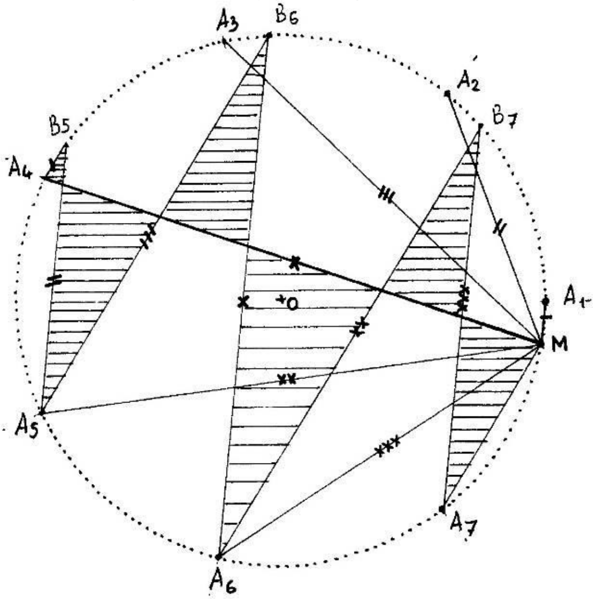
Notons α la mesure de l'angle $\left(OM,OA_0\right)$ et posons $\theta = \dfrac{2\pi}{2n+1}$

Alors $MA_k = 2.OA_0.\sin\left(\dfrac{\alpha + k\theta}{2}\right)$.

Or $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \sin\left(\dfrac{\alpha+k\theta}{2}\right) = \mathrm{Im}\left[e^{\frac{i\alpha}{2}}.\sum_{k=0}^{2n}\left(-e^{\frac{i\theta}{2}}\right)^k\right] = 0$, car $\left(-e^{\frac{i\theta}{2}}\right)^{2n+1} = 1$

Solution géométrique dans le cas général, proposée par André **VIRICEL** :

La solution, bien que donnée ici dans le cas d'un heptagone régulier A_0A_7 reste valable dans le cas général (polygone régulier à 2n+1 côtés) :



On mène par A_7, A_6 et A_5 les parallèles à MA_1 ; elles recoupent le cercle respectivement en B_7, B_6 et B_5.
Les cordes B_7A_6, B_6A_5 et B_5A_4 sont parallèles à MA_7.

On considère la ligne brisée $MA_7B_7A_6B_6A_5B_5A_4$. Elle forme avec MA_4 six triangles isocèles.
La somme des arcs interceptés par chacun des angles à la base est égale à 3/7 du cercle.
On en déduit que la somme des longueurs des trois cordes parallèles à MA_1 et égale à la somme des longueurs des quatre cordes de même direction que MA_7.
Or chacune de ces cordes est égale à l'un des sept segments allant de M aux sommets de l'heptagone, donc :

$$MA_1 + MA_3 + MA_5 + MA_7 = MA_2 + MA_4 + MA_6.$$

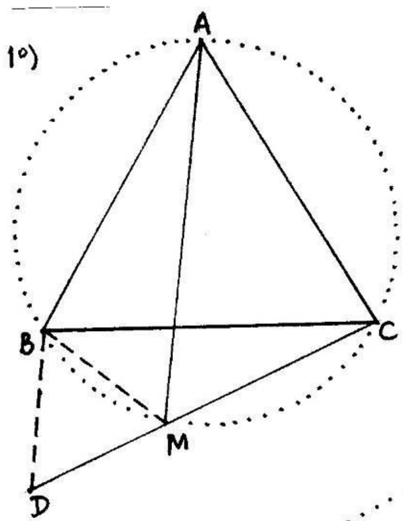
Jean **LAMBERT** (SAINT-MAX) a également résolu ce problème, et nous propose le corollaire suivant :
Soit M un point du petit arc $\overset{\frown}{A_0A_{2n}}$ du cercle circonscrit au polygone régulier $A_0A_1...A_{2n}$, tel que $A_0OM < \dfrac{\pi}{2n+1}$.
Si H_k désigne le milieu de $[MA_k]$, alors $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k.OH_k = 0$.

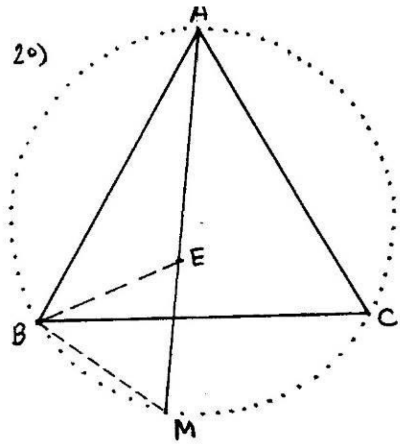
Voici enfin **trois solutions géométriques dans le cas du triangle équilatéral** :
Indications de ces solutions (*figures au dos*) :

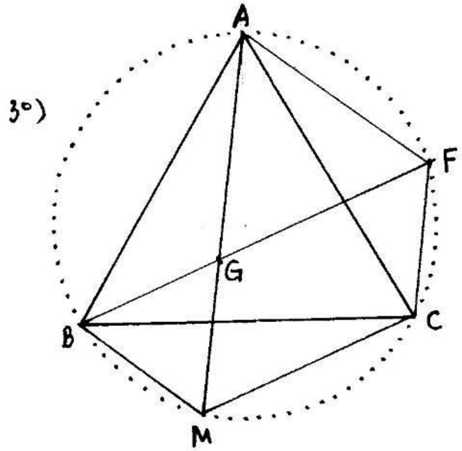
1°) Prolonger CM de MD avec MD = MB.
Le triangle BDM est équilatéral.
La rotation de centre B et d'angle π/3 transforme D en M, C en A, donc CD en AM.
Donc MA = MB + MC. Cqfd.

2°) Porter ME sur MA tel que ME = MB.
Le triangle BME est équilatéral.
La rotation de centre B et d'angle π/3 transforme M en E, C en A, donc MC en EA.
Donc MA = MB + MC.. Cqfd.

3°) Mener la corde BF parallèle à MC.
Il en résulte que CF est parallèle à MA et que AF est parallèle à MB.
MB = MG ; AF = GA = MC
Donc MB + MC = MG + GA = MA.
Cette dernière démarche est utilisable dans le cas d'un polygone régulier quelconque. Cqfd.


1°)
A
B
C
M
D


2°)
A
E
B
C
M


3°)
A
F
G
B
C
M