Le théorème de Fermat résolu ?

$$a^n + b^n = c^n$$

Nous nous permettons de reproduire ici l'intégralité de l'article de Jean-François Augereau, paru dans le journal LE MONDE du 25 juin 1993 : nous pensons que cette information intéressera nos adhérents au plus haut point. La Rédaction.

par Jean-François Augereau

Le premier jour, les mathématiciens ont écouté poliment son brillant exposé. Le deuxième jour, leur intérêt s'est fait plus vif. La salle a commencé à bruire des commentaires les plus fous et les fax ont arrosé le monde entier d'informations. Andrew Wiles, mathématicien britannique, spécialiste de la théorie des nombres et actuellement chercheur en poste à l'université de Princeton, était en train de faire *« un truc énorme »* à l'occasion de ce séminaire à Cambridge (Grande-Bretagne) sur le thème « Fonctions L et arithmétique ». Et puis, le troisième jour, mercredi 23 juin, il a frappé un grand coup, annonçant la conquête d'un Saint-Graal arithmétique recherché par des milliers de mathématiciens depuis plus de trois cent cinquante ans : la démonstration du théorème de Fermat.

Le mystère tient en peu de mots. Il est la conséquence inattendue d'un théorème bien connu des potaches, le théorème de Pythagore.

Le théorème de Pythagore précise que le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. Bref, que $a^2 + b^2 = c^2$. La formule a plu par sa simplicité au point que Diophante, un mathématicien grec de l'école d'Alexandrie qui vivait au IVe siècle de notre ère, s'est emparé de cette équation magique, qui peut avoir bien d'autres applications que la géométrie, pour décrire une méthode simple de construction des triangles rectangles dont les mesures des côtés sont des nombres entiers comme 3, 4 et 5. Elevés au carré, $3^2 + 4^2$ est bien égal à 25, lui-même résultat de 5^2. De même, 6, 8 et 10 satisfont aussi à cette équation.

Ce bel ordre aurait pu rester en l'état si, au XVIIe siècle, Pierre de Fermat, magistrat de Toulouse et de Castres, conseiller au parlement de Toulouse, ne s'était piqué d'une passion brûlante pour les mathématiques et les analyses de Diophante. Reprenant le thème du carré des nombres entiers, il montra, du moins le prétend-il, que cette équation, merveilleusement illustrée par Pythagore et Diophante, ne se vérifiait plus avec des nombres entiers pour des puissances supérieures à 2. En d'autres termes, pour Fermat, il n'est pas possible de trouver un nombre entier c qui, porté à la puissance n, soit égal à la somme de deux entiers, eux-mêmes à. la puissance n ([1]).

Ce problème, apparentent simple, est en fait d'une complexité extrême, sur laquelle nombre de mathématiciens se sont cassé les dents. Depuis plus de trois siècles, le « dernier théorème de Fermat » résiste aux plus grands esprits ([2]). Depuis plus de trois siècles, Pierre de Fermat défie des générations de mathématiciens, lui qui, suprême ironie ou astuce, avait écrit en marge d'une édition sur les travaux de Diophante qu'il avait résolu le problème et « *trouvé une remarquable preuve* », mais qu'il lui était impossible d'en donner la solution du fait de la petitesse de cette marge.

« Pour moi, je le confesse »

Rien ne pouvait être plus agaçant pour les mathématiciens qui eurent à le lire. D'autant que, tout magistrat qu'il fut, Pierre de Fermat était sans doute l'un des plus grands mathématiciens de son temps. Au même titre que Descartes, dont les travaux en géométrie firent la renommée. Fermat fut partout. Avec bonheur. En géométrie comme en théorie des nombres. Dans le calcul infinitésimal comme dans le calcul intégrât. Dans tes mathématiques comme dans la physique, dès lors qu'il s'occupa de réflexion et de réfraction de la lumière en optique géométrique.

Le premier sans doute, il a donné la formule multiplicative du nombre des combinaisons chères aujourd'hui aux statisticiens et aux parieurs du Loto et du PMU. Le premier encore, il a ébauché des recherches qui, si elles n'aboutirent pas, préfigurèrent les travaux de Newton et de Leibniz. Il a régné en maître sur l'étude des carrés magiques qu'on enseigne aux élèves de cinquième et de quatrième, et peut-être considéré comme un précurseur du calcul différentiel et l'un des inventeurs, avec Pascal, du calcul des probabilités.

Pascal, qui le nommait « *le premier homme du monde* », avouait qu'il ne pouvait pas toujours te suivre dans ses travaux. « *Cherchez ailleurs*, lui écrivait-il, *qui vous suive dans vos inventions numériques; pour moi je vous confesse que cela me passe de bien loin; je ne suis capable que de les admirer* ».

Aussi est-il, après pareille louange, difficile de détruire le mythe et de s'acharner sur le fait de savoir si, sur son dernier théorème, Fermat n'a fait que constater une propriété sans la démontrer.

Même si cela est vrai, remercions-le. Car jamais les mathématiciens n'ont déployé autant d'efforts, ouvert de voies et développé de domaines, qui ont certes échoué dans la démonstration du théorème de Fermat, mais se sont en revanche révélés riches de bien d'autres applications, comme par exemple la création de codes numériques inviolables. Le théorème de Fermat était-il condamné à rester « inviolé» ? A défaut de le briser, beaucoup se sont simplement contentés de vérifier, grâce à des ordinateurs ultra rapides, qu'il était vrai et ce jusqu'à des puissances ou des exposants de quatre millions.

Voilà cinq ans pourtant, en 1988, on a bien cru que l'impossible était enfin arrivé, lorsqu'un chercheur de la Tokyo Metropolitan University, Yoichi Miyaoka, a affirmé à Bonn, devant un petit cercle de collègues de i'Institut Max-Planck pour les mathématiques, qu'il avait trouvé la solution. Il avait pour cela fait appel aux travaux récents d'un Soviétique, A. N. Parshm, de l'Institut Steklov à Moscou, sur la recherche d'analogies arithmétiques de certains résultats de la géométrie algébrique. Après plusieurs mois de vérifications, il s'avéra que Miyaoka s'était fourvoyé.

« *Il y avait des naïvetés dans sa démonstration* », souligne John Coats, mathématicien britannique à l'université de Cambridge et spécialiste de la théorie des nombres. Aujourd'hui, c'est au tour d'Andrew Wiles d'être dans l'arène. « *La situation est très différente*, explique John Coats, *car, celte fois, les experts du monde entier étaient là et ont pour la plupart, été convaincus par l'approche de Wiles* ».

S'il avait tort après les mois de vérifications auxquelles vont se livrer sans pitié ses honorables confrères, cela n'enlèverait rien à sa notoriété. On applaudirait à sa tentative dans la mesure où, comme l'écrivait, en mars 1988 dans la revue Science, un mathématicien à propos de Yoichi Miyaoka, *« son approche mathématique* [pour résoudre[le théorème de Fermat] *était à elle seule pleine de promesses* » pour les mathématiques.

JEAN-FRANÇOIS AUGEREAU

NOTES

([1]) Les mathématiciens définissent la puissance n d'un nombre comme le produit de ce nombre n fois par lui-même. Ainsi, a au carré est le produit de a par a et se note a² ; a au cube est égal à $a \times a \times a$ et se note a^3, etc.

([2]) Ce théorème est souvent appelé « le dernier théorème » parce qu'au XVIII[e] siècle il était le dernier d'une longue série que les mathématiciens n'avaient pas démontré.

Le triomphe de l'inaccessible

« *Magnifique !* », a déclaré Enrico Bombieri, de Pise, actuellement en poste à Princeton. « *Impressionnant !* », a renchéri John Coats, de l'université de Cambridge, à l'occasion de cette mémorable conférence d'arithmétique faite à l'Institut Isaac-Newton. « *Cette fois-ci semble bien devoir être la bonne*, ajoutent Jean-Marc Fontaine et Luc Illusie, professeurs à Paris XI. *Le théorème de Fermat s'appellera désormais théorème de Wiles* ».

Ce « tour de force » couronne une longue série de travaux en géométrie algébrique et en théorie des nombres, auxquels ont contribué des mathématiciens du monde entier. Ce n'est pas le moindre des paradoxes de cette affaire : Andrew Wiles, quarante ans, n'a pas directement démontré le théorème de Fermat, mais fait plus fort encore en donnant les grandes lignes de la démonstration de la conjecture de Tamiyama-Weil dont le « grand théorème » du magistrat toulousain n'est qu'une conséquence.

« *Certes, il reste des détails à vérifier*, reconnaît John Coats, *mais ce n'est plus qu'une question de technique, et ce qui a été présenté à Cambridge suffit à démontrer Fermat* ». Le génie de Wiles, ajoute-t-il, a été de « *persister dans la conquête de cet inaccessible sommet des mathématiques qu'est la conjecture de Tamiyama-Weil alors que beaucoup avaient renoncé* ». « *Il a su reprendre certaines idées anciennes et récentes qui permettaient enfin de faire rentrer cet exercice profondément arithmétique qu'est le théorème de Fermat dans un de ces cercles d'idées et de théories qui agitent le milieu des mathématiciens* ». Cela tient presque de l'esthétique, de la poésie.

« *Jusqu'à hier*, précise Jean-Marc Fontaine, *on essayait de replacer Fermat dans un contexte plus général. C'est ainsi qu'au début du vingtième siècle, L. Mordell fit une conjecture sur tes courbes algébriques qui, dans le cas de Fermat, dit que si l'on impose en plus aux entiers a, b et c d'être premiers entre eux, alors il n'y a qu'un nombre fini de solutions. Cette conjecture, longtemps réputée inabordable, fut pourtant prouvée par un Allemand, Gerd Faltings, en 1983, ce qui eut a l'époque un immense retentissement* ». Mais Fermat résistait toujours.

« *Ce n'est qu'en 1988*, explique Luc Illusie, *qu'un pas décisif fut accompli quand, à la suite d'une idée du mathé-*

maticien allemand G. Frey et des travaux de J.-P. Serre (professeur au Collège de France) sur la théorie des représentations des groupes de Galois, le mathématicien américain K. Ribet démontra que le théorème de Fermat résultait d'une autre conjecture classique en théorie des nombres, dite conjecture de Tamiyama-Weil ».

Le problème de Fermat cessait donc d'être une curiosité pour prendre sa place dans un vaste réseau d'idées et de travaux actuels en théorie des nombres. Et c'est de cette inaccessible conjecture que Wiles a su triompher « *en exploitant de manière extrêmement astucieuse et ingénieuse une grande variété de techniques récemment mises en œuvre par B. Mazur et H. Hida sur la théorie des déformations des représentations galoisiennes, par G. Faltings sur les théorèmes de comparaison p-adiques et par V. Kolyvagin et M. Flache sur les systèmes d'Euler* ». Toutes notions qui sont, bien sûr, à la portée du premier venu...

Même les mathématiciens conviennent que la chose n'est pas simple. En témoigne l'opinion de Jean-Marc Fontaine pour qui « *une telle démonstration ne peut se comprendre entièrement en quelques jours* ». Mais l'affaire est importante et « *dès l'an prochain, il y aura des séminaires dans le monde entier pour vérifier les détails de la démonstration. Le théorème de Wiles n'est pas seulement la fin d'une grande histoire. Il change la manière de voir quelques-uns des grands problèmes qui intéressent actuellement les arithméticiens et augmente le champ des possibles* ».

J.-F. A.