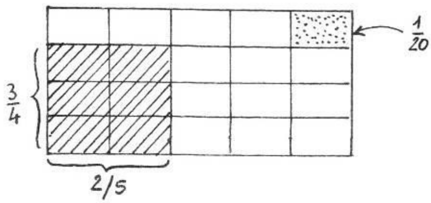
PROMENADE AU PAYS DES FRACTIONS

Par François DROUIN
Collège les Avrils
Saint-Mihiel (Meuse)

François Drouin relate et analyse les réactions des ses élèves de quatrièmes « d'aide et de soutien », parfois appelées quatrièmes « d'accueil » (classes constituées par les élèves jugés trop faibles ou pas suffisamment motivés pour entrer en quatrième technologique au lycée professionnel). Ces réactions seront certainement utiles aux professeurs enseignant dans les classes de collège dites « normales ».

$\mathbf{\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}}$:

Pour visualiser ce résultat, j'ai longtemps fait comme de nombreux manuels :



Mais comment s'assurer que les élèves utilisent $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ autrement qu'une recette supplémentaire à digérer :

abracadabra pour multiplier les fractions, on multiplie les numérateurs et on multiplie les dénominateurs.

Dans l'esprit de nos élèves, vu la simplicité du procédé, pourquoi ne pas utiliser cette formule magique pour affirmer que :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

Comme beaucoup, je m'en tirais par une pirouette : attention ! pour additionner deux fractions, il **faut** le même dénominateur.

aïe, aïe, aïe !
Il ne faut pas mettre les doigts dans son nez, mais il faut le même dénominateur. La seule justification à cette dernière obligation étant à peu près : ça « marche » tellement bien quand il y a le même dénominateur ! **Quant aux doigts dans le nez, je vous laisse justifier l'interdit !**

Dans les compétences exigibles du programme de cinquième, il est écrit savoir utiliser les égalités

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}, \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}, \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}.$$

En quatrième « d'aide et de soutien », plus de compétences exigibles. Savoir utiliser n'est plus la priorité.

Quelques tentatives pour justifier $\mathbf{\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{6}{7}}$:

- Si je mange 2/7 de gâteau ajoutés à 4/7 de gâteau, pour les élèves j'aurai bien mangé 6/7 de gâteau (malgré le risque d'indigestion, le peu de gâteau laissé aux copains et le curieux partage en sept...).

- Mais à mon âge je me méfie des excès alimentaires et j'aimerais bien ne plus avoir à manger sur mon lieu de travail.
  J'ai essayé 2 cm + 4 cm. Les 6 cm ne posent pas de problème.
  J'ai donc $\frac{2}{100}\text{m}+\frac{4}{100}\text{m}=\frac{6}{100}\text{m}$. Mais je travaille avec des fractions de grandeur et non avec des nombres !

- Alors j'ai sorti le grand jeu : $\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=2\times\frac{1}{7}+4\times\frac{1}{7}=(2+4)\times\frac{1}{7}=6\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$.
  Là, je travaillais avec des nombres, mais quel silence dans la salle !
  $\frac{2}{7}=2\times\frac{1}{7}$: étonnement chez certains...
  Deux septièmes sont égaux à deux fois un septième, comme deux francs sont bien égaux à deux fois un franc. Là, ça va mieux...

$2\times\frac{1}{7}+4\times\frac{1}{7}=(2+4)\times\frac{1}{7}$: hé, monsieur, il y a $\frac{1}{7}$ qui a disparu !

Des septièmes, il y en a deux. J'y ajoute quatre autres septièmes. J'aurai donc six septièmes. De plus, la notation utilisée entre autres par les allemands donne peu de consistance aux nombres $\frac{14}{3}$ et $\frac{4}{3}$ ($\frac{14}{3}$ est 4 2/3, et $\frac{4}{3}$ est 1 1/3).

Revenons à l'égalité $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{20}$

J'écris $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\left(3\times\frac{1}{4}\right)\times\left(2\times\frac{1}{5}\right)=3\times\frac{1}{4}\times2\times\frac{1}{5}=(3\times2)\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\right)$:

$\frac{3}{4}=3\times\frac{1}{4}$, maintenant on a compris.

$\left(3\times\frac{1}{4}\right)\times\left(2\times\frac{1}{5}\right)=3\times\frac{1}{4}\times2\times\frac{1}{5}$ avec toutes ces multiplications, pourquoi tant de parenthèses ?

$3\times\frac{1}{4}\times2\times\frac{1}{5}=(3\times2)\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\right)$: on regroupe comme ça nous arrange

Le **gros problème** à régler est le quart d'un cinquième est un vingtième. Si je coupe mon gâteau en 5 parts, et si je recoupe chaque part en 4, j'obtiens 20 parts ; et je prends un vingtième du gâteau. L'entorse à mon régime est bien légère, j'en laisse aux copains, mais je ne peux pas dire que mes élèves aient vu le rapport avec $\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$.

J'ai de nouveau travaillé avec le langage courant, et j'ai noté ceci !

3×20 = ... facile !!!
trois fois vingt égalent ... facile
le triple de vingt là, il faut réfléchir...
30 : 3 ... facile
le tiers de trente : ça se corse…
les deux tiers de trente : avec le résultat précédent, j'ai trouvé $\frac{2}{3}\times30$:
on a tous trouvé quelque chose...

En résumé :

Lorsque l'écriture est opératoire, des mécanismes (justes ou faux) fonctionnent. Pas besoin de chercher à comprendre, on trouve toujours quelque chose à faire. Dans le cas d'un écriture en français, il est plus difficile d'écrire n'importe quoi ; certains trouvent, d'autres sont bloqués.

Quelques questions encore :

- Pourquoi le double de trois septièmes serait-il plus difficile à trouver que $2\times\frac{3}{7}$ (dans certains manuels, on voit : $2\times\frac{3}{7}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{7}=\frac{2\times3}{1\times7}=\frac{6}{7}$).
- De même pour la moitié de huit neuvièmes : $\frac{1}{2}\times\frac{8}{9}$ ou $\frac{8}{9}:2$?
- Comment des élèves pourraient deviner que le quart d'un cinquième est égal à $\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}$ puisque dans les compétences exigibles du programme de sixième, il est dit qu'il faut savoir multiplier un décimal par a/b ? Mais il n'est pas exigé de savoir que « prendre les 3/4 de 800 » cache l'opération « $\frac{3}{4}\times800$ », et qu'il est sûrement judicieux de calculer trois fois le quart de 800 !
  Tant de manuels nous disent on peut multiplier par 3 puis diviser par 4 ou diviser par 4 puis multiplier par 3. Quelle chance ! On peut dire la formule magique puis taper sur le bord du chapeau ou taper le bord du chapeau puis dire la formule magique. Dans un cas ou dans l'autre, le lapin apparaît.

En conclusion :

- Avec mes élèves de sixième, Je me suis empressé de « sortir » des compétences exigibles pour travailler sur les correspondances Français ↔ Écritures numériques.
- Une inquiétude demeure. Nos évaluations EVAPM ont tenté Je voir si les élèves savaient bien faire telle ou telle chose. Mais comment évaluer le sens donné aux choses par l'élève ?
  « $2\times\frac{3}{7}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{7}=\frac{2\times3}{1\times7}=\frac{6}{7}$ » et « Le double de $\frac{3}{7}$ est $\frac{6}{7}$ » ne me paraissent pas relever du même niveau de compréhension ; et le libellé des compétences exigibles n'incite-t-il pas à favoriser le premier calcul ?
- La classe de quatrième d'aide et de soutien est un merveilleux observatoire des difficultés rencontrées par les élèves après 2, 3 ou 4 années de collège. Pas de programme rigide, 15 élèves au maximum... de quoi tenter beaucoup de choses, et en réussir quelques unes ...).

■