

LES « REPRESENTATIONS » QUE LES ELEVES ONT DES CONCEPTS UTILISÉS EN PROBABILITES

Jacques VERDIER
Lycée A. Varoquaux
54 TOMBLAINE

Note de la Rédaction : le présent article constitue la majeure partie de l'un des chapitres de la brochure « Probabilités au Lycée », actuellement en cours de rédaction, et qui sera publiée par l'I.R.E.M. de Lorraine.

La notion même de probabilité n'est pas présente chez tous les élèves de première.

J'entends par là que certains ne peuvent même pas s'exprimer par des phrases du type « J'ai une chance sur trois que... [telle chose se produise] ».

J'en prends pour exemple les réponses à un test réalisé en première G avant d'avoir abordé le chapitre de probabilités.

Question : Que penses-tu de l'affirmation suivante : « Si je lance simultanément deux pièces de 1 F, j'ai une chance sur trois de voir apparaître une pile et une face ». [¹].

Réponses : « Oui, cela dépend comment la pièce tombe ».

« Non, c'est faux : c'est l'effet du hasard ».

« Oui, si on lance les pièces pour que l'une retombe sur pile et l'autre sur face ».

« Non, on n'a pas obligatoirement une pile et une face : c'est une question de chance ».

« Cela se pourrait bien : c'est une question de chance ».

On voit tout de suite à quelles difficultés on va se heurter avec ces élèves pour qui les concepts (ou le vocabulaire) des probabilités semblent totalement étrangers.

Mais le fait d'énoncer (en comprenant ce que l'on dit) des phrases du type « J'ai une chance sur trois que... », « ... 94 chances sur 100... » (très courant), voire « ...5 chances sur 12... » n'est qu'un premier pas. Il y en a un autre à franchir (et c'est un des objectifs de la classe de première) : penser en terme de nombres compris entre 0 et 1 ; la probabilité, d'un événement est un nombre (et non pas une "expression" orale ou écrite). Quant à la "nature" de ce nombre, voir plus loin dans ce même article.



¹ J'ai emprunté à Annie HENRY, avec quelques modifications, le test individuel qu'elle a proposé à ses élèves, publié dans REPERERS-IREM n°6, janvier 1992, page 38/39, dans un article intitulé *L'enseignement des probabilités dans le programme de première*.

J'avais posé cette question sur le lancer de 2 pièces pour voir combien d'élèves faisaient le raisonnement (implicite) suivant : « Il y a trois issues possibles : "2 piles", "2 faces", "1 de chaque", on a **DONC** une chance sur trois que cela se produise ».

Ce raisonnement est proposé par la très grosse majorité des élèves. C'est une des premières (et plus tenaces !) conceptions erronées que nous aurons à faire "détruire" par les élèves. Encore faut-il qu'ils prennent conscience eux-mêmes que cette représentation est erronée.

C'est là que l'approche "fréquentiste" du nouveau programme me paraît être pertinente : on réalise l'expérience, c'est à dire que l'on jette effectivement les 2 pièces, un très grand nombre de fois (on peut demander aux élèves d'effectuer chez eux au moins 100 lancers chacun, et on se trouve le lendemain avec une statistique de plus de 3 700 essais...); les données statistiques vont alors permettre aux élèves d'infirmer leur hypothèse " $1/3 - 1/3 - 1/3$ ", et de la remplacer par une autre, plus pertinente, comme " $1/4 - 1/4 - 1/2$ ". C'est à ce moment-là et à ce moment-là seulement que l'enseignant pourra apporter une explication (théorique) modélisant la situation.

En réalisant cette expérience (en classe) avec des élèves de B.T.S., je me suis rendu compte que certains faisaient des "échanges" de pièces avec leur voisins. Questionnés, ils m'ont répondu que « ça ne marcherait pas si les deux pièces n'étaient pas identiques ». On voit là un exemple de ce qui peut parasiter une bonne modélisation chez les élèves (et même chez les professeurs) : les deux pièces sont-elles "discernables", et cela va-t-il modifier les probabilités ? Et le résultat serait-il le même si on lançait successivement deux fois la même pièce au lieu d'en lancer deux simultanément ?



Une autre difficulté que rencontrent les élèves est la notion même d'expérience aléatoire, c'est à dire dont le résultat est dû uniquement au hasard.

Reprenant une question de Anne HENRY (voir note [1]), j'ai posé la question suivante :

Question : Que penses-tu de l'affirmation suivante : « Il y a une chance sur deux qu'il fasse beau demain ? »

L'idée était de faire prendre conscience aux élèves, grâce au débat qui allait suivre, de la différence entre un processus aléatoire et un processus déterministe.

Certains élèves ont répondu « C'est faux », avec deux catégories d'arguments :

- on ne sait pas définir correctement ce que veut dire "beau" ; la réponse sera donc "floue" (manque de critères objectifs) ;

- il n'y a pas que deux types de temps ("beau" et "mauvais"), mais par exemple trois ("beau", "moyen" et "mauvais") : on aurait alors une chance sur trois [on retrouve l'erreur fondamentale énoncée plus haut].

Et il y a ceux qui ont répondu « vrai ». Alors même qu'on était à un moment de l'année où il faisait un "temps de chien", avec vent, pluie, et une météo qui annonçait que cela allait durer. J'avais obtenu la même réponse l'année précédente, à la veille d'un premier mai ensoleillé...

Et il a fallu "pousser" les élèves très loin dans leurs derniers retranchements (« Quel temps fera-t-il ce soir ? et dans une heure ? ») pour obtenir des réponses du type « On est presque sûr qu'il pleuvra »...

Disons, à la décharge des élèves, que même pour LAPLACE, grand spécialiste des probabilités s'il en est, cela n'était pas si évident : dans son « Essai Philosophique sur les probabilités », septième principe, il suppose implicitement, en l'absence de toute information, que la probabilité d'un événement vaut $1/2$.



En ce qui concerne le "hasard", j'ai posé à mes élèves la question proposée par A. Henry [cf. note 1], en la modifiant légèrement :

boules	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
sorties	132	134	134	132	136	134	140	146	123	122	127	139	119	136	144	154	126
20 tirages	7	1	5	2	5	2	1	4	1	4	3	1	2	4	4	4	3

boules	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
sorties	148	150	146	140	137	133	152	141	144	133	140	129	130	138	132	126
20 tirages	3	3	0	4	2	3	3	2	2	3	1	2	6	3	2	4

boules	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
sorties	150	130	142	152	165	129	154	123	130	134	126	148	131	117	154	150
20 tirages	3	1	4	3	6	4	3	2	1	2	2	4	0	1	3	4

Résultats de 1123 jeux de loto.

Question : Ces informations peuvent-elles t'être utiles pour jouer, et pourquoi ?

Environ la moitié des élèves (sur 3 classes) ont répondu : « NON. C'est du (pur ?) hasard ».

Les autres ont répondu « OUI ». Ces « OUI » étaient presque tous assortis de l'argument « je choisirais les numéros qui sortent le plus souvent (ceux qui "ont de la chance" !) ».

Même dans un débat en classe, il est très difficile à certains élèves d'admettre que ce qui s'est passé avant n'a absolument aucune incidence sur ce qui va se passer au prochain tirage. Il sera donc difficile de parler d'événements indépendants à ces élèves.

Parmi ceux qui avaient répondu « NON », je me suis rendu compte que quelques uns avaient cependant entouré sur leur feuille les 6 numéros les plus sortis : chassez les fausses représentations, elles reviennent au galop !

J'ai eu une fois une réaction imprévue d'un de mes élèves de B.T.S. (qui avait "milité" en début d'année pour ce "pur hasard", cette indépendance des tirages) : après avoir travaillé en cours sur la loi des grands nombres, il s'est

écrié « Mais ce qu'on avait dit au début de l'année est faux ! Il faut jouer les numéros qui sont sortis le moins souvent, car, sinon, la loi des grands nombres ne serait pas vraie ! ».

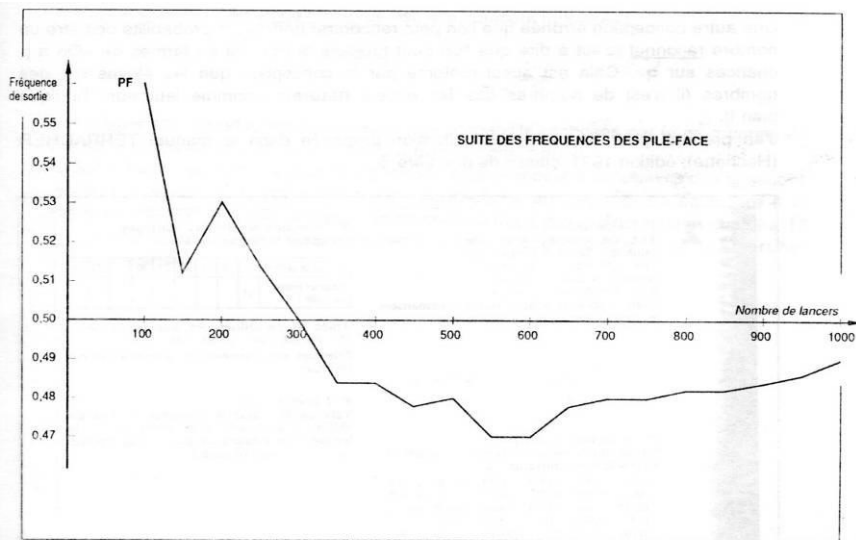
Un autre exemple de la même erreur se présente lorsque l'on propose aux élèves l'énoncé suivant : « Une femme a déjà eu 4 garçons ; son prochain enfant a-t-il plus de chances d'être une fille ou un garçon ? ».

D'ALEMBERT avait fait exactement la même faute [²] : « Au jeu de pile ou face, après avoir fait face trois fois, face devient moins probable le coup suivant ».



Une autre erreur faite très souvent (même par les "spécialistes") est de croire que la convergence de la fréquence d'apparition d'un événement vers sa probabilité est "rapide" et "presque uniforme".

D'abord elle n'est pas rapide du tout. Elle est même d'une lenteur désespérante... Il suffit pour s'en convaincre de réaliser effectivement des tirages aléatoires. Voir par exemple REPERES-IREM N°6, janvier 1992, pages 50-51 :



Elle n'est pas non plus "monotone". On peut même dire, au tirage d'une pièce à pile ou face, qu'au coup suivant on aura au moins une chance sur deux de s'éloigner de la limite (qui vaut 1/2).

Certains élèves peuvent être "perturbés" par des résultats tels que ceux-ci :

² Encyclopédie de D'Alembert et Diderot, 1754, tome IV.

Recherche de $p(0,55 X < 0,8)$ où X est une variable aléatoire distribuée uniformément sur $[0,1]$: on doit trouver $1/4$.

Simulation avec la touche RAN# de la calculatrice.

Résultat obtenu pour $n = 100\ 000$ lancers : $p_n = 0,24953$;

Résultat obtenu pour $n = 500\ 000$ lancers : $p_n = 0,24940$.

C'est donc "meilleur" avec 100 000 qu'avec 500 000 !!!

(à rapprocher de la réaction de l'élève concernant la loi des grands nombres, citée ci-dessus).



Une autre conception erronée que l'on peut rencontrer parfois : la probabilité doit être un nombre rationnel (c'est à dire que l'on peut toujours la traduire en termes de « On a p chances sur q ». Cela est aussi renforcé par la conception que les élèves ont des nombres (il n'est de nombres que les entiers naturels - comme leur nom l'indique bien !).

J'en prendrai pour exemple cette situation proposée dans le manuel TERRACHER (Hachette), édition 1991, classe de première S :

2

1° L'expérience aléatoire

Elle est réalisée avec une punaise (figure ci-contre) que l'on jette en l'air et dont on observe la position lorsqu'elle s'est immobilisée sur le sol. Cette expérience a deux issues, schématisées et codées comme indiqué ci-dessous.



issue 1

issue 0

2° Les données statistiques

En lançant la punaise 200 fois, on obtient la série statistique suivante :

```

10001 11101 11101 11111 11100 01110
10101 01000 01001 11111 01110 01001
10111 10011 11101 10010 01010 01111
11010 10010 10001 10011 00101 11100
01101 10111 01110 01101 11010 11000
11001 10100 11110 11111 11101 11000
10100 11111 11101 11111

```

3° La gestion des données statistiques

Compléter le tableau suivant :

nombre de chiffres	5	10	15	20	25	30	...	180	200
fréquence relative du chiffre 1	0,4								

Après 40, on utilisera les données de 20 en 20 : 60, 80, 100, ..., 180, 200.

Effectuer une représentation graphique de ces résultats.

4° L'interprétation

Vers quelle valeur la fréquence relative du chiffre 1 tend-elle à se stabiliser... à la longue ? (On essaiera de donner une réponse sous forme fractionnaire.)

La valeur précise autour de laquelle la fréquence relative du chiffre 1 tend à se concentrer quand on répète l'expérience un grand nombre de fois sera appelée **probabilité** de l'issue 1.

En donnant à cette probabilité la valeur $\frac{5}{8}$ — c'est

raisonnable — nous obtenons le *tableau* ci-contre, qui appelle quelques commentaires :

■ *sur la notation* : elle est naturelle ; la probabilité de l'issue ω est notée $P(\omega)$.

■ *sur les valeurs* : comme il n'y a que deux résultats possibles : issue 1 ou issue 0, si l'issue 1 a 5 chances sur 8 de se produire, l'autre issue a donc 3 chances sur 8 de se réaliser ($\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{8}{8} = 1$).

Pour le lancer de la punaise, seule l'expérimentation permet d'approcher la probabilité d'une issue. Il en va heureusement différemment dans d'autres *expériences aléatoires* :

issue ω	1	0
probabilité $P(\omega)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$

Il n'y a bien sûr aucune raison que la probabilité soit rationnelle (voir par exemple le problème de l'aiguille de Buffon, où la probabilité à trouver est $2/\pi$). Mais nous sommes "conditionnés" par les exemples issus du domaine fini (urnes, loteries, etc.) : c'est dû aussi au fait que le programme ne nous demande de traiter, en probabilité, que le cas des espaces finis.

Et il est vrai que la fréquence observée est, elle, toujours rationnelle.



En conclusion, l'introduction des concepts de probabilité proposés par le programme de première ne sera pas si aisée que l'on pourrait le croire a priori.

Il faudra faire preuve d'une grande ingéniosité pour proposer à nos élèves des situations qui leur permettront de "démontrer" leurs conceptions erronées, et de construire à la place un nouveau modèle rendant compte correctement des phénomènes observés. Et on s'aperçoit, au vu de quelques énoncés, que l'on est quelquefois en train de « **marcher sur des œufs** » !