

UN « VRAI » PROBLÈME CONCRET

Jean PILLOY
Lycée Varoquaux
54TOMBLAINE

On sait que les mathématiques de l'antiquité furent d'abord une affaire d'arpenteurs et d'astronomes-astrologues, les préoccupations comptables des commerçants apparaissant sans doute plus tardivement. Au hasard de la lecture d'un cours polycopié de la faculté des lettres de Besançon, j'ai trouvé un problème de construction géométrique assez simple mais qui a l'avantage d'être un «vrai» problème concret auquel les arpenteurs grecs se sont confrontés il y a environ 2 700 ans. René Levêque, professeur d'histoire et universitaire réputé pour ses travaux d'histoire ancienne, cite dans son cours les travaux d'Adamesteanu et Valtin relatifs à la manière dont on a cadastré l'arrière-pays de Métaponte, colonie grecque fondée au sud de l'Italie. Voici ce qu'il nous apprend :

- ★ Les lots sont des parallélogrammes et non pas des rectangles.
- ★ La centuriation est effectuée de la façon suivante : la diagonale d'un parallélogramme coupe à angle droit la diagonale de deux parallélogrammes contigus, chacune d'elles au tiers de sa longueur. Les diagonales ainsi définies sont orientées NS pour l'une, EO pour l'autre. Ces deux diagonales (celle d'un parallélogramme et celle de deux parallélogrammes contigus) mesurent respectivement 2 700 et 3 300 pieds (elles sont donc dans le rapport de 9 à 11). Les côtés de chaque parallélogramme ne peuvent alors s'exprimer qu'en nombre irrationnels.
- ★ Cela donne pour les lots une superficie de 297 plèthres (en gros 26 ha), très directement comparable à celle des lots d'un autre cadastre colonial, celui de Chersonésos (en Crimée) : 300 plèthres (avec d'ailleurs des rectangles et non des parallélogrammes).

On peut imaginer un tracé de ces parallélogrammes en utilisant les énoncés de Thalès et/ou la notion de triangles homothétiques. Voici une fiche de travail qui pourrait être proposée à des élèves de seconde ou de 1^{ère} S. Il resterait à définir le niveau d'exigence pour la rédaction et la justification de la construction. De manière annexe, la transformation des hectares en plèthres peut donner lieu à un travail sur les changements d'unités (1 mètre vaut environ 3,4 pieds «achéens»).

LA CADASTRATION DE MÉTAPONTE



Entre le VIII^e et le VI^e siècle avant notre ère, des Grecs originaires d'Achaïe, nord du Péloponnèse, installèrent une colonie en Italie du sud, dans le golfe de Tarente : la ville de Métaponte.

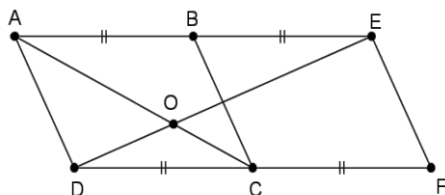
Une partie du sol à cultiver des alentours de cette ville fut cadastrée, elle fut découpée en parcelle d'égale superficie. Ces parcelles étaient attribuées aux colons pour les faire mettre en valeur.

Dans la plupart des cadastres antiques, on utilise des parcelles formées de rectangles. A Métaponte, on utilisa un procédé beaucoup plus complexe que voici :

Soit un parallélogramme AEFD. B est le milieu de [AE], C celui de [DF]. [AC] et [DE] sont perpendiculaires. La diagonale [DE] mesure 3 300 pieds, le segment [AC] 2 700 pieds.

- 1) Faire une figure à l'échelle.
Proposez une méthode pour construire cette figure, en justifiant toutes les étapes de la construction.
- 2) L'unité d'aire étant le plèthre, qui vaut 10 000 pieds carrés, calculez l'aire du parallélogramme ABCD.
Ce procédé permet de tracer deux parallélogrammes d'aires égales, ABCD et BEFC, qui constituent deux lots mesurant environ 26 hectares.

QUELQUES PISTES...

1^{ère} remarque :

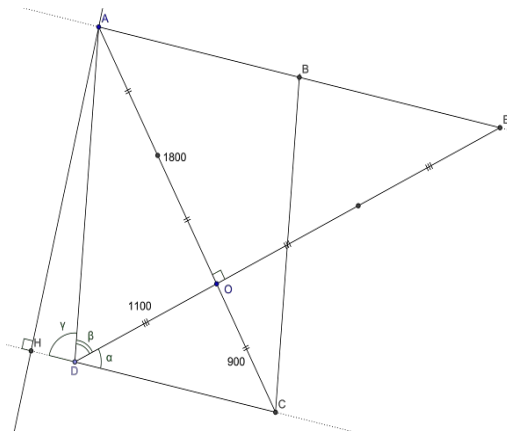
Ne nous occupons pas des hypothèses concernant les diagonales $[AC]$ et $[DE]$. Ici les longueurs AC et DE ne correspondent pas à l'énoncé et (AC) n'est pas perpendiculaire à (DE) , mais $OE = 2 OD$ et $OA = 2 OC$.

Cherchez pourquoi...

Ce qui est vrai dans cette configuration est encore vrai même si on est plus « exigeant » avec $[AC]$ et $[DE]$. Persuadez-vous en !

Proposition de construction :

- 1) Choisir son échelle (par exemple 1 cm pour 200 pieds)
- 2) Tracer d'abord $[AC]$ et $[DE]$ sécants en O tels que $OE = 2 OD$ et $OA = 2 OC$.
- 3) Compléter le tracé : parallélogramme $AEFD$ puis segment (CB) .

Calcul de l'aire de ABCD :

$$\tan \alpha = \frac{900}{1100} \quad \text{d'où } \alpha \approx$$

.... De même $\beta \approx$

Or $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta =$...

Calcul de la hauteur

$$AH : \sin \gamma = \frac{AH}{HD} \quad \text{d'où}$$

$$AH = AD \cdot \sin \gamma$$

AD s'obtient avec le théorème de Pythagore, de même que DC .

$$\text{Aire } (ABCD) = AH \times DC = AD \cdot \sin \gamma \times DC \approx 297\,000 \text{ pieds carrés}$$

Aire $\approx$ 297 plèthres.

2^e remarque :

Si 297 plèthres $\approx$ 26 hectares, alors 1 m $\approx$ 3,4 pieds. Pourquoi ?