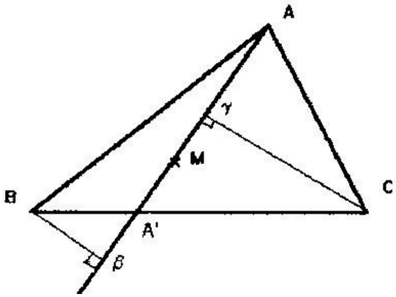
Solution du problème n°30 (Petit Vert de juin 92)
proposé par Richard **BECZKOWSKI** (CHÂLONS-SUR-SAÔNE)

ABC est un triangle quelconque. On prend sur le segment [AB] m points $_i$B ($1 \leq i \leq m$) deux à deux distincts. De même, on prend sur le segment [AC] n points C_j ($1 \leq j \leq n$) deux à deux distincts.
En joignant B à tous les points C_j et C à tous les points B_i, on découpe le triangle ABC en $(n+1)(m+1)$ régions.
On demande le rapport de l'aire de chacune de ces régions à celle du triangle ABC.

La solution proposée par l'auteur se présente comme une suite d'exercices d'utilisation du barycentre. Vous trouverez page 21 des éléments pour traiter le problème dans le cas général ou dans des cas particuliers, avec des élèves non concernés par les barycentres.

Exercice 1

Il consiste à prouver que tout point M intérieur à un triangle ABC est barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients aire(BMC), aire (CMA) et aire(AMB).



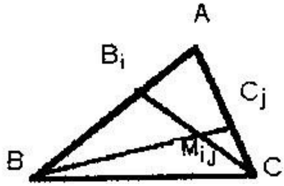
A' est barycentre de ((B ; A'C) ; (C ; A'B)) car $A'C \times \overline{A'B} = A'B \times \overline{A'C} = 0$.
Nous pouvons remplacer les coefficients par des coefficients proportionnels qui seront successivement :

- aire(AA'C) et aire(AA'B) car les triangles AA'C et AA'B ont la même hauteur relative aux bases A'C et A'B ;
- Cγ et Bβ qui sont les hauteurs des mêmes triangles relativement à leur base commune [AA'] ;
- aire(CMA) et aire(BMA) car Cγ et Bβ sont hauteurs des triangles CMA et BMA de base commune [MA].

Le point A' est donc barycentre de ((B ; aire(CMA)) ; (C ; aire(BMA))).
Le barycentre de ((A ; aire(BMC) ; (B ; aire(CMA) ; (C ; aire(BMA)) est donc sur (AM).
Pour les mêmes raisons, il se trouve sur (BM), et sur (CM) : c'est donc bien M.

Exercice 2

B_i et C_j étant donnés respectivement sur [AB] et [AC], préciser la position de $M_{i,j}$ sur $[CB_i]$ et sur $[BC_j]$:



Posons $AB_i = b_i AB$ et $AC_j = c_j AC$.

B_i est le barycentre de $((B ; b_i) ; (A ; 1 - b_i))$ et C_j barycentre de $((C ; c_j) ; (A ; 1 - c_j))$.
On peut faire en sorte que A ait le même coefficient dans les deux cas : B_i est barycentre de $((B ; b_i(1 - c_j)) ; (A ; (1 - b_i)(1 - c_j))$ et C_j de $((C ; c_j(1 - b_i) ; (A ; (1 - c_j)(1 - b_i))$, et donc barycentre de $((B_j ; 1 - c_j) ; (C ; c_j(1 - b_i)))$ ou de $((C_j ; 1 - b_i) ; (B ; b_i(1 - c_j)))$.

On en déduit $CM_{i,j} = \dfrac{(1-c_j)CB_i}{1-b_i c_j}$ et $BM_{i,j} = \dfrac{(1-b_i)BCj}{1-b_i c_j}$.

Exercice 3

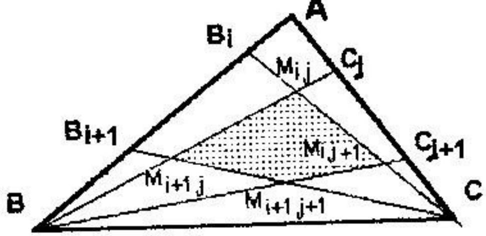
Calculer le rapport de l'aire du triangle $BM_{i,j}C$ à celle du triangle BAC.

D'après l'exercice 1, $M_{i,j}$ est barycentre de :
$((A ; \text{aire}(BM_{i,j}C) ; (B ; \text{aire}(CM_{i,j}A) ; (C ; \text{aire}(AM_{i,j}B))$;
D'après l'exercice 2, $M_{i,j}$ est barycentre de :
$((A ; (1 - b_i)(1 - c_j) ; (B ; b_i(1 - c_j)) ; (C ; cj(1 - b_j)))$.
La somme des coefficients vaut $1 - b_i c_j$.

On en déduit : $r_{i,j} = \dfrac{\text{aire}(BM_{i,j}C)}{\text{aire}(BAC)} = \dfrac{(1-b_i)(1-c_j)}{1-b_i c_j}$

Exercice 4

Calculer l'aire d'une région définie dans l'énoncé initial :



Le rapport de l'aire de la surface grisée à celle du triangle ABC est :

$$\boxed{R_{i,j} = r_{i,j} + r_{i+1,j+1} - r_{i,j+1} - r_{i+1,j}}$$

On peut considérer ce résultat comme la réponse au problème posé, ou essayer de transformer cette expression.

Exercice 5

Transformer l'expression obtenue pour $R_{i,j}$.

Posons $u_j = r_{i,j} - r_{i+1,j} = \dfrac{(1-b_i)(1-c_j)}{1-b_i c_j} - \dfrac{(1-b_{i+1})(1-c_j)}{1-b_{i+1}c_j} = \dfrac{(1-c_j)^2(b_{i+1}-b_i)}{(1-b_i c_j)(1-b_{i+1}c_j)}$

Ici, les calculs deviennent plus lourds, et il faut soit prendre son courage à deux mains, soit utiliser un logiciel de calcul formel. Les deux méthodes mènent au même résultat (heureusement !) qui est le suivant :

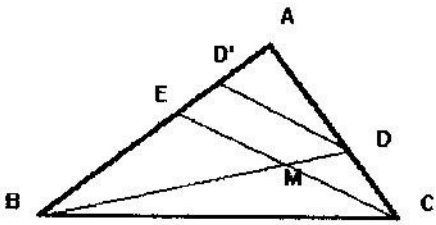
$$\boxed{R_{i,j} = \frac{(b_{i+1}-b_i)(c_{j+1}-c_j)(2-S_1+2S_4-S_3)}{(1-b_i c_j)(1-b_{i+1}c_j)(1-b_i c_{j+1})(1-b_{i+1}c_{j+1})}}$$

où S_4, S_3 et S_1 sont respectivement le produit, la somme des produits trois à trois, et la somme des rapports de b_i, b_{i+1}, c_j, c_{j+1}.

IDÉES POUR UNE RÉSOLUTION SANS BARYCENTRE :

Détermination de la position de M

La parallèle à (CE) menée par D coupe (AB) en D'. Deux possibilités : utiliser les triangles homothétiques, ou le théorème de Thalès.



On pose $\dfrac{AD'}{AE} = \dfrac{AD}{AC} = c$ et $\dfrac{AE}{AB} = b$.

On obtient : $\dfrac{BM}{BD} = \dfrac{BE}{BD'} = \dfrac{AB-AE}{AB-AD'} = \dfrac{AB-bAB}{AB-bcAB} = \dfrac{1-b}{1-bc}$

Calcul du rapport de l'aire de BMC à celle de ABC

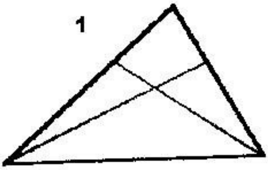
On établit que $\frac{\text{aire(BMC)}}{\text{aire(BDC)}}=\frac{\text{BM}}{\text{BD}}=\frac{1-\text{b}}{1-\text{bc}}$

et que $\frac{\text{aire(BDC)}}{\text{aire(ABC)}}=\frac{\text{CD}}{\text{CA}}=\frac{\text{AC}-\text{AD}}{\text{CA}}=1-\frac{\text{AD}}{\text{AC}}=1-\text{c}$.

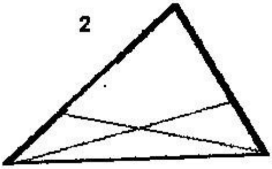
D'où, par multiplication : $\frac{\text{aire(BMC)}}{\text{aire(ABC)}}=\frac{(1-\text{b})(1-\text{c})}{1-\text{bc}}$

Quelques thèmes :

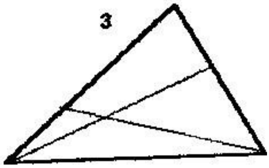
1



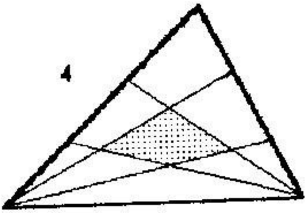
2



3



4



Dans chacune des trois figures, deux côtés sont partagés en trois segments égaux.

Dans **1** et **2** il faut déterminer la position du point d'intersection des sécantes sur ces sécantes, ainsi que sur la médiane du troisième côté.

Dans **3** il faut placer le point d'intersection des sécantes sur ces sécantes.

Dans **4** il faut calculer le rapport de l'aire de la partie grisée à l'aire du triangle.

R. BECZKOWSKI

Problème du trimestre n°31

proposé par André **VIRICEL** (VILLERS LES NANCY),
d'après une idée « strasbourgeoise »

Soit M_0 un point quelconque du plan, extérieur au carré ABCD.
On construit une suite de points M_n de la façon suivante : de M_n, en « regardant » le carré ABCD, on cherche le sommet qui est « vu » le plus à droite ; M_{n+1} est le symétrique de Mn par rapport à ce sommet.
Montrer qu'il existe un rang p tel que $M_p = 0$.

Sur la figure ci-après, par exemple, $M_{12} = M_0$: