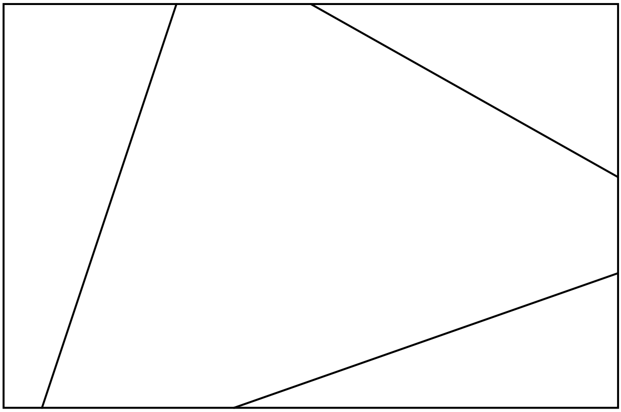
Problème du trimestre n°29
proposé par Claude **PAGANO** (LA SEYNE SUR MER)

Les sommets A, B et C d'un triangle sont en dehors de la feuille de papier.
Comment, sans sortir de la feuille, construire le centre de gravité G de ce triangle, en n'utilisant qu'un « translateur » (instrument qui trace la parallèle, par un point donné, à une droite donnée).
Même problème pour le centre I du cercle inscrit, le centre O du cercle circonscrit et l'orthocentre H.



Solution du problème n°28 (PETIT VERT de décembre 1991)
proposé par Jean-Marie **DIDRY**

Les n sommets d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 déterminent C_2^n segments. Quel est le produit de leurs longueurs ?

Nous avons reçu deux propositions de solutions pour ce problème, qui partaient toutes deux de la même idée et utilisaient la même méthode. L'une, assez détaillée, de Michel **THIRY** (Lycée Georges de la Tour, NANCY) ; l'autre de Richard **BECZKOWSKI** (CHÂLONS-SUR-SAÔNE), que nous reproduisons ci-dessous.
Signalons que Michel **THIRY**, à partir de ce problème, a construit une activité de recherche pour ses terminales C. Faute de place, il nous est impossible d'en rendre compte dans cette brochure.

Les n sommets A_k du polygone régulier sont, si on choisit bien son repère orthonormal, les racines n-ièmes de 1. Nous les nommerons z_k, où k est un entier qui peut prendre toutes les valeurs entre 0 et $n - 1$ inclus.

Le produit p des longueurs des segments issus d'un sommet est le même pour tous les sommets.

Le produit demandé sera $\sqrt{p^n}$ car la longueur de chaque segment intervient 2 fois dans le calcul du produit p.

Calculons p à l'aide des segments issus de A_0 image de $z_0 = 1$.

$$A_0A_k = |1 - z_k|$$

$$p = \prod_{k=1}^{n-1} A_0A_k = \prod_{k=1}^{n-1} |1 - z_k| = \left|\prod_{k=1}^{n-1}(1 - z_k)\right|$$

Les nombres complexes z_k sont les zéros, autres que 1, du polynôme $z^n - 1$; ce sont donc les zéros du polynôme

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$$

Pour z = 1, ce polynôme prend la valeur n.

On en déduit $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - z_k) = n$, donc $p = n$.

Le produit demandé est donc $\sqrt{n^n}$.

Bravo à celui qui a découvert ce très beau résultat.

Accessoirement, on peut remarquer que $|1 - z_k| = \left|1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right|$.

Or $\left|1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right| = e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{-\frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) = -2ie^{\frac{ik\pi}{n}} \sin\frac{k\pi}{n}$; $\sin\frac{k\pi}{n}$ étant positif, $|1 - z_k| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$

Et donc : $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}|1 - z_k|}{2^{n-1}} = \frac{n}{2^{n-1}}$