CUBES ET SPHERES EN PERSPECTIVE

Par Jacques VERDIER

On utilise couramment deux types de perspective, correspondant à deux types de projection.

L'une, appelée « perspective à points de fuite », est mathématiquement une projection centrale (ou projection conique) de l'espace sur un plan. Elle est assez proche de la vision de l'œil, mais a de gros inconvénients « pédagogiques » : elle ne conserve ni le parallélisme, ni les milieux ; son emploi en classe est donc quasiment impossible.

Voir ci-dessous un cube en perspective conique. On en trouvera dans [LOMB], pages 59 à 104, une étude théorique assez complète.

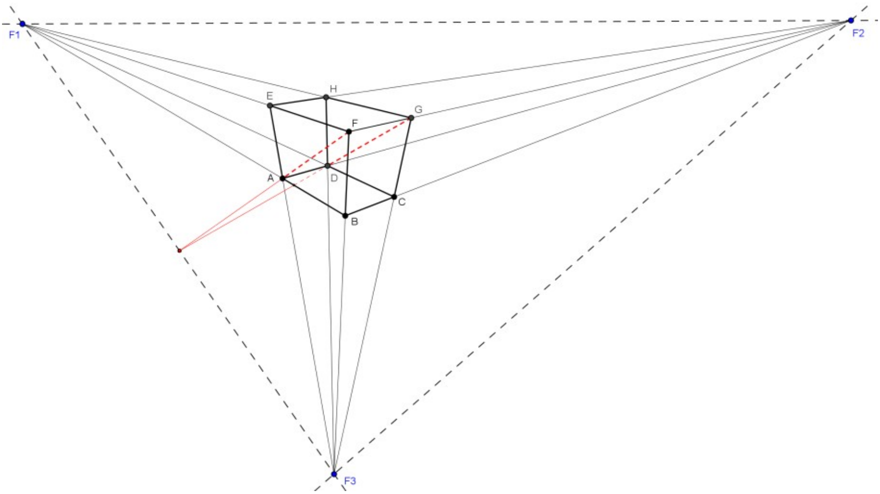


Figure 1 : un cube en perspective conique

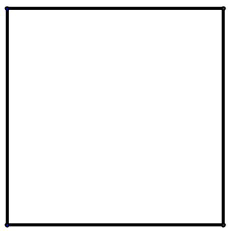
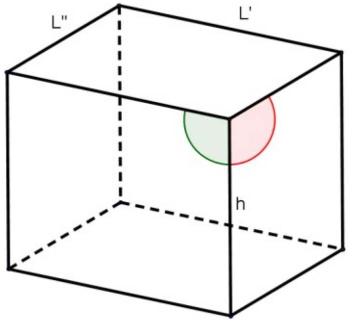
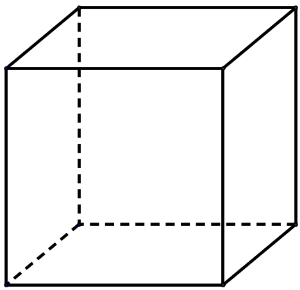
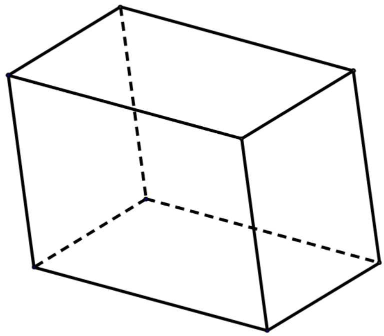
F_1 : point « à l'horizon » dans la direction de (BA)
F_2 : point « à l'horizon » dans la direction de (BC)
F_3 : point « à l'horizon » dans la direction de (BF)
droite (F_1F_2) : « horizon » de la direction de plan (ABC)
droite (F_2F_3) : « horizon » de la direction de plan (CBF)
droite (F_3F_1) : « horizon » de la direction de plan (ABF)
Les droites (DG) et (AF), qui sont parallèles en réalité et appartiennent à la direction de plan(BFA), ont dont leur « point à l'horizon » sur F_3F_1

Le second type correspond mathématiquement à une projection parallèle (ou projection cylindrique) de l'espace sur un plan. Elle correspond à l'ombre d'un objet éclairé par le soleil.
Énorme avantage pédagogique : elle conserve le parallélisme et les milieux (et, par conséquent, les rapports de longueurs dans une direction donnée).

Pour représenter ce qui peut « arriver » quand on utilise une telle perspective, le plus facile est de représenter la projection d'un cube de référence (ce qui équivaut à un triplet i, j, k orthonormé) sur le plan.

Plusieurs cas sont alors à envisager [PARZ] :
- ou bien la direction de projection est orthogonale au plan de projection (ex : projection verticale sur le plan horizontal), ou bien elle ne l'est pas ;
- d'autre part, ou bien le cube de référence a une de ses faces parallèle au plan de projection (cette face sera alors projetée « en vraie grandeur »), ou bien ça n'est pas le cas.

Ce qui nous amène à quatre possibilités, résumées dans ce tableau (D est la direction de projection, P le plan sur lequel on projette) :

CUBE	Une face du cube est parallèle à P	Aucune face du cube n'est parallèle à P
D est orthogonal à P	 *('vue' du dessin industriel)*	 *(perspective axonométrique)*
D n'est pas orthogonal à P	 *(perspective « cavalière »)*	 *(cas général)*

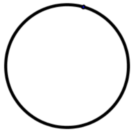
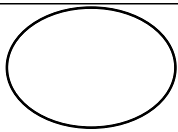
Dans la perspective axonométrique (D orthogonal à P), la connaissance de h et des angles φ et θ détermine entièrement L' et L'' (les « formules » sont assez complexes, on les trouve dans [AUDI] pages 118 à 125).

En classe, on utilise le plus souvent soit la perspective cavalière, soit une perspective parallèle quelconque (en s'arrangeant pour « qu'à l'œil » le cube ressemble effectivement à un cube, contrairement au schéma ci-dessus).

Qu’advient-il de la projection de la sphère ?

Tout d’abord, le distinguo « faces parallèles, ou non, à P » n’a plus lieu d’être : il existe toujours un plan équatorial parallèle à P.

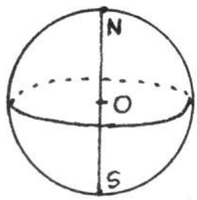
Mais restent les deux cas: D orthogonal à P, ou non :

SPHÈRE		
D est orthogonal à P		La sphère se projette suivant un cercle
D n’est pas orthogonal à P		La sphère se projette suivant une ellipse (exemple : ombre d’un ballon rond au soleil)

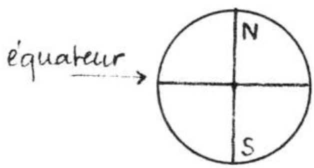
Pédagogiquement, vu la difficulté de tracer les ellipses, on sera amené à se placer le plus souvent dans le premier cas.

Mais on aboutit alors à un paradoxe : on n’utilisera pas en classe le même type de perspective selon que l’on voudra dessiner des corps « ronds » (sphères, cônes) ou des corps « droits » (pavés, tétraèdres, prismes ...). Le comble de la difficulté consistant à vouloir mettre ensemble un cube et une sphère (ou d’autres objets du même type) : voir dessin en annexe.

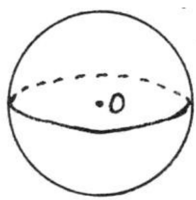
Et j’en viens à une erreur fréquemment rencontrée : si on veut représenter le globe terrestre (supposé sphérique) avec ses deux pôles et son équateur, on obtient le plus souvent ceci :



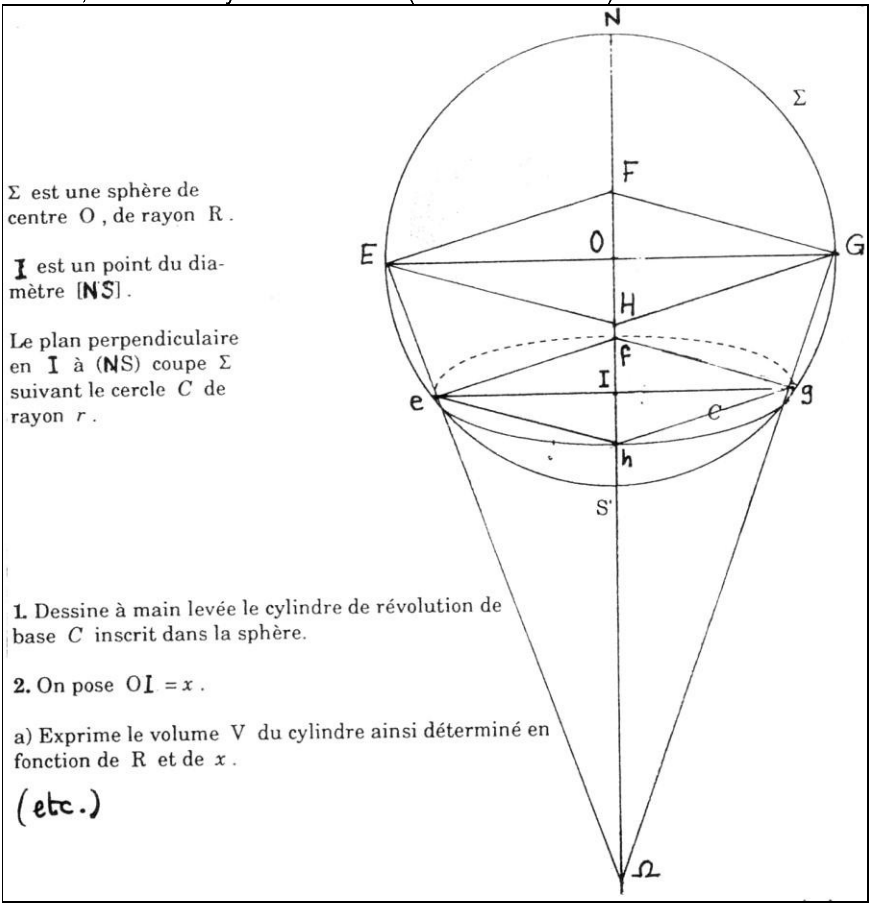
Il y a là une contradiction.
En effet : la figure tracée étant un cercle (et non une ellipse), on est dans le cas où la projection est orthogonale. Si l’axe (NS) est vu comme un diamètre, c’est qu’il est parallèle au plan de projection, comme le plan de l’équateur lui est orthogonal, il est orthogonal au plan de projection. Et on devrait obtenir ceci :



Ce qui mathématiquement est exact, mais n’a absolument aucun intérêt, puisqu’on n’a plus ; l’impression du relief.
Si l’on veut conserver la configuration ci-dessous, on ne sait plus où sont les points N et S (en tout cas pas sur les bords). **Peut-on les placer correctement ?**



La réponse à cette question est **OUI !** Je prends comme support, pour l'expliquer, une fiche de l'excellente brochure [IREM] que je recommande vivement à tous (aux professeurs de première pour l'utiliser en classe, aux autres pour « s'amuser » un peu à quelques exercices de perspective). Malheureusement, cette erreur y a été commise (involontairement !) dans la fiche n° S11 :

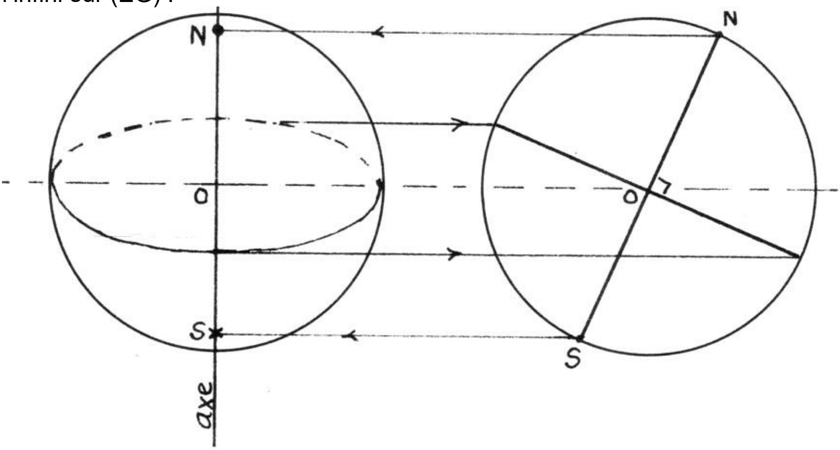


Le cercle (C) tracé est un « parallèle » (en langage géographique) ; il est donc image de l'équateur dans une homothétie dont le centre A est situé sur l'axe des pôles.
En projection (donc sur le dessin) cette homothétie se conserve, ce qui permet de déterminer les points E, F, G et H (aux quatre « coins » de l'équateur !).

ATTENTION : I étant le centre de l'ellipse, les extrémités **e** et **g** du grand axe ne se trouvent pas sur le contour apparent (représenté ici par le cercle Σ) : **e** et **g**

sont sur le « méridien 90° » (en admettant que la sphère soit vue face au « méridien 0° »).

Imaginons maintenant la vue de côté de cette sphère (c'est-à-dire avec l'œil à l'infini sur (EG) :



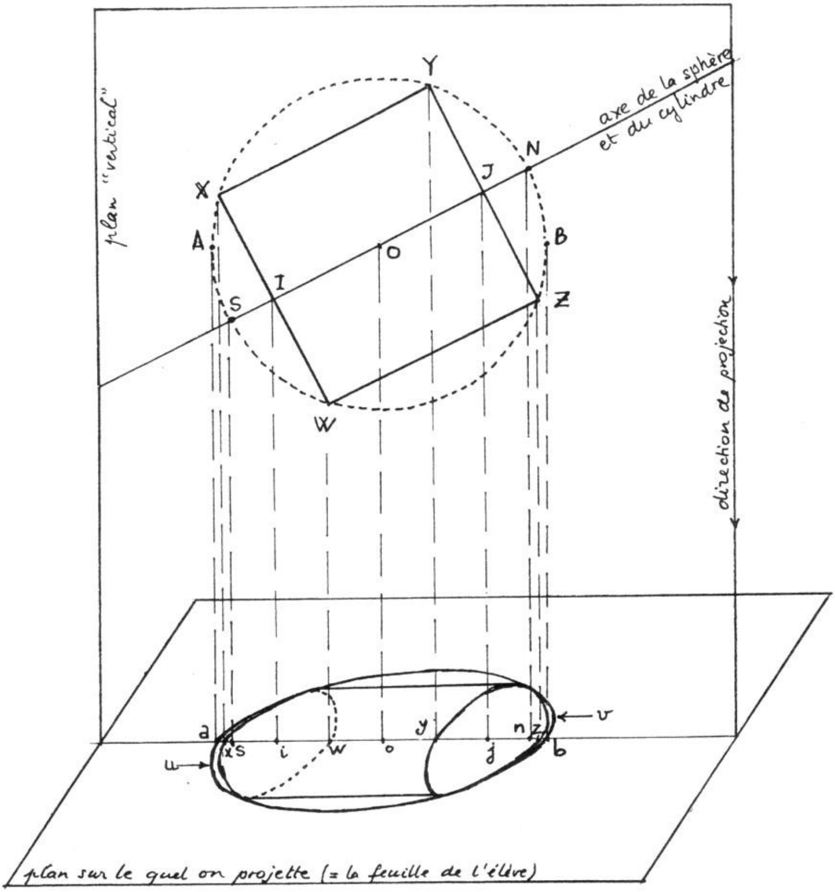
Le pôle Nord est visible, le pôle Sud est caché. Et la partie du « méridien 90 » située dans l'hémisphère Nord est visible, alors que sa partie située dans l'hémisphère Sud est cachée.

Sur la page suivante, j'ai essayé de représenter une vision dans l'espace de l'exercice proposé sur cette fiche (on demande à l'élève de tracer le cylindre de base (C) inscrit dans la sphère **Σ**). La feuille de papier de l'élève est donc représentée en bas, horizontalement (mais vue en perspective cavalière) ; au dessus, j'ai représenté la coupe de l'ensemble sphère/cylindre par le plan de projection contenant l'axe des pôles. Avec comme la convention de notation suivante : majuscule pour les points de l'espace, minuscules pour les points du plan où on projette. **ATTENTION**: je n'ai pas représenté le solide sphère/cylindre, et le cercle en pointillés **n'est pas** le contour externe de la sphère dans l'espace (voir figure de couverture).

Le problème pédagogique reste entier: que faire avec les élèves ??? Au premier cycle, comme au cours de géographie, je pense qu'il n'y a pas à hésiter : utilisons cette perspective « erronée », mais bien pratique:

En première S, E ou F, par contre, je pense que l'on peut faire prendre conscience aux élèves de cette erreur de représentation, et les amener à la construction exacte de N et S à partir de l'équateur représenté par une ellipse, ce qui constitue un «véritable» problème de géométrie de l'espace.

Et vous, quel est votre avis sur ce sujet ?



BIBLIOGRAPHIE

[AUDI]. Gérard AUDIBERT : LA PERSPECTIVE CAVALIÈRE, publication APMEP n° 75 (1990). Epuisée.

[IREM]. IREM de Lorraine : GEOMETME DANS L'ESPACE, classes de première (76 fiches destinées aux élèves). 1991,

[LOMB]. Philippe LOMBARD : Université de Nancy 1, Centre de Téléenseignerrient Universitaire, Algèbre et géométrie, module AG1 : GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE ET CALCUL VECTORIEL, tome 1 (1985). Edité par l'IREM de Lorraine

[PARZ]. Bernard PARZYSZ : article ***La perspective : cavalière ou parallèle ?*** paru dans PLOT n° 57 (décembre 1991), pratiquement entièrement consacré à la perspective.

■