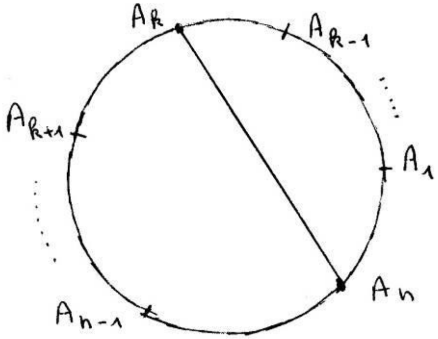
PROBLÈME

Solution du numéro précédent

Solution proposée par Richard **BECZKOWSKI** (CHÂLONS-SUR-SAÔNE). Solutions équivalentes de Franck **V** ASSEUR (LONGUYON) et François **M**UNIER (SAINT-DIÉ).

n – 1 points sur le cercle mènent à R_{n-1} régions. Ajoutons un $n^{ème}$ point à un endroit non occupé du cercle.
Baptisons A_1, A_2 ... A_k ... A_{n-1} nos n points, A_n étant le dernier-né :



Quittons A_n, et dirigeons-nous, en ligne droite, vers A_k. Nous traçons une nouvelle frontière (A_nA_k) et créons, par dichotomie, une région nouvelle chaque fois que notre route traverse une ancienne frontière, que celle-ci soit droite ou cercle.

Chaque frontière droite rencontrée joint un point situé d'un côté de la droite (A_nA_k) à un point situé de l'autre côté de cette droite ! A_1, A_2 ... A_{k-1} sont k-1 points situés d'un côté, et A_{k+1}, A_{k+2} ... $A_{k+(n-k-1)}$ sont n-k-1 points situés de l'autre côté.
Sur le trajet $[A_kA_n]$ nous rencontrons (k-1)(n-k-1) vieilles frontières avant d'atteindre le cercle en A_k. le nombre de nouvelles régions ainsi crées est donc :

$$(k-1)(n-k-1) + 1$$

que nous écrirons :

$$n(k-1) - k^2 + 2.$$

Traçons les nouvelles frontières $[A_kA_n]$ pour k variant de 1 à n-1. Ces droites ne se rencontrent qu'en A_n. Nous créons de nouvelles régions qui viennent s'ajouter aux R_n existantes.

Nous avons établi la relation entre R_n et R_{n-1} :

$$\boxed{R_n = R_{n-1} + \sum_{k=1}^{k=n-1} [n(k-1) - k^2 + 2]}$$

D'où : $R_n = R_{n-1} + n\sum_{k=1}^{n-2} k - \sum_{k=1}^{k=n-1} k^2 + 2(n-1)$

soit : $R_n = R_{n-1} + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{2} - \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 2(n-1)$

qui donne finalement : $R_n = R_{n-1} + \dfrac{n^3}{6} - n^2 + \dfrac{17n}{6} - 2$.

Par un procédé classique et en complétant l'énoncé par $R_0 = R_1 = 1$, ce qui n'a rien de scandaleux et en outre vérifie la relations précédente, on obtient :

$R_n = 1 + \dfrac{1}{6}\sum_{k=1}^{k=n} k^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^2 + \dfrac{17}{6}\sum_{k=1}^{k=n} k - 2n$,

soit $R_n = 1 + \dfrac{n^2(n+1)^2}{24} - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \dfrac{17n(n+1)}{12} - 2n$, qui aboutit à :

$R_n = \dfrac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}$ que l'on peut préférer sous la forme :

$$\boxed{R_n = 1 + \frac{n(n-1)[(n-2)(n-3)+12]}{24}}$$

N.B. François MUNIER a fait tracer la figure par Cabri-Géomètre® et calculer la somme par Dérive®

PROBLÈME N° 24

La première question est relativement facile : la fonction $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ admet-elle une limite lorsque $x \to \infty$?

La seconde question est plus difficile qu'il n'y paraît : la suite $u_n = \dfrac{\tan n}{n}$ admet-elle une limite lorsque $n \to \infty$?