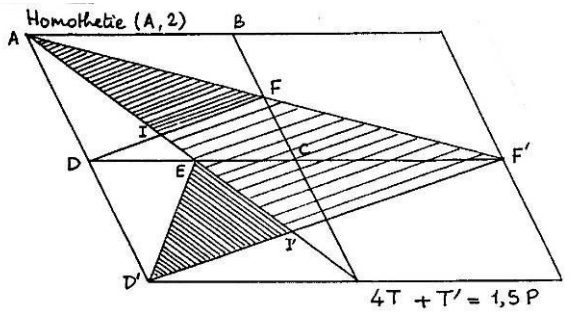
Solution du problème n°21 (mars 1990)

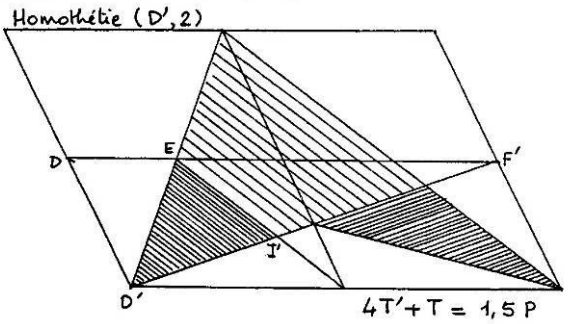
Rappel de l'énoncé : Soit un parallélogramme ABCD, E le milieu de [DC] et F le milieu de [BC] ; (AE) et (DF) se coupent en I. Monter que l'aire du triangle AIF vaut 30 % de l'aire du parallélogramme.

Tout d'abord une lettre de Christian **AMET** (Lycée Jules Ferry, SAINT-DIÉ) qui nous a mis du baume au cœur et nous encourage à poursuivre l'édition de notre bulletin régional :

Je me suis intéressé aux problèmes du Petit Vert à partir du n° 19, pour lequel j'avais une solution informatique en BASIC que je n'ai pas jugé bon de vous communiquer. Le programme récursif que vous avez publié me semblait anormalement lent, j'ai cherché son défaut : il suffisait de changer l'ordre des pièces... Je joins la version rectifiée (15 secondes sur Amstrad PC1640).
Pour le problème n° 20, je n'imagine pas de méthode donnant toutes les solutions dans un temps raisonnable et j'ai mis au point un programme paramétrable rapide (6 essais par seconde) qui permet d'obtenir de nombreuses variantes.
Le problème n° 21 ressemble davantage à notre travail quotidien. Un premier type de méthode consiste à préciser la position du point I pour justifier que le triangle DEI représente 5% du parallélogramme. On peut alors utiliser Thalès avec la parallèle à (DF) passant par E (prouvant EA = 5 ×EI) ou avec la parallèle à (AE) F (prouvant 2 ×DF = 5×DI). Le repère (D, **DA, DC**) peut servir à une réponse analytique rapide.
Je préfère cependant une solution visuelle qui ne nécessite que peu de théorie. La propriété qu'une homothétie de rapport 2 multiplie les aires par 4 peut même se prouver par découpage. Je joins les dessins en couleur qui valent plus qu'un long exposé
Avec tous mes encouragements et mes félicitations pour le Petit Vert, je vous adresse, cher collègue, mes meilleures salutations.

Voici les figures proposées par Christian **AMET** (où avons dû remplacer les couleurs par des hachures). P est l'aire du parallélogramme ABCD, et T l'aire du triangle cherché :

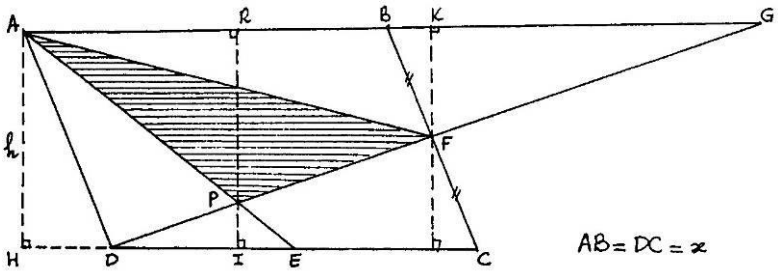




Dans chaque cas, la partie non hachurée vaut 2,5×P. on obtient T = T' par soustraction, puis T = 0,3×P.

****

Seconde solution, n'utilisant que des savoir-faire du programme de troisième, proposée par C. **BINGEL** (Collège Jean Bauchez, LE BAN SAINT MARTIN) ; notons cependant que le nombre d'étapes nécessaires fait que la résolution de ce problème reste inaccessible à un élève de troisième :



aire(AFP) = aire(ABCD) – [aire(ABF) + aire(AED) + aire(PFCE)]

$$\text{aire(AED)} = \frac{DE \times AH}{2} = \frac{\frac{x}{2} \times h}{2} = \frac{x \times h}{4}$$

$\text{aire(ABF)} = \dfrac{AB \times FK}{2} = \dfrac{x \times \frac{h}{2}}{2} = \dfrac{x \times h}{4}$ (FK = $\dfrac{h}{2}$ car parallèles équidistantes)

aire(PCFE) = aire(FCD) – aire(PED)

$$\text{aire(FCD)} = \frac{x \times \frac{h}{2}}{2} = \frac{x \times h}{4} \ ;$$

$$\text{aire(PED)} = \frac{DE \times PI}{2} \ ;$$

le calcul de AG se fait avec le théorème de Thalès appliqué aux triangles BGF et AGD ; sur les triangles PED et PAG, Thalès donne

$\dfrac{PI}{PR} = \dfrac{DE}{AG} = \dfrac{x}{2} \times \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{4}$ d'où $PI = \dfrac{h}{5}$;

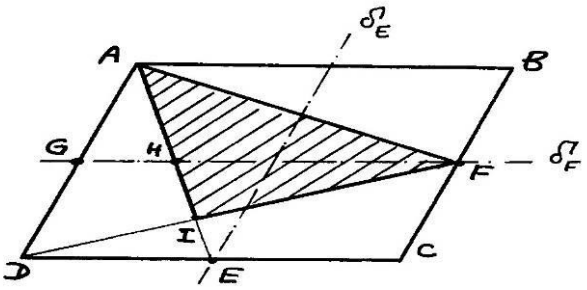
$$\text{donc aire(PED)} = \frac{\frac{x}{2} \times \frac{h}{5}}{2} = \frac{x \times h}{20}$$

$$\text{soit aire(PCFE)} = \frac{xh}{4} - \frac{xh}{20} = \frac{xh}{5}.$$

Il vient enfin $\text{aire(AFP)} = xh - \left(\dfrac{xh}{4} + \dfrac{xh}{4} + \dfrac{xh}{5} \right) = \dfrac{3xh}{10}$.

****

Une troisième solution, proposée par Alain **MERCIER** (collège Jules Lagneau, METZ), que nous avons résumée :



Tout d'abord, en notant a l'aire du parallélogramme,
aire(AIF) = a -[aire(ADI) + aire(FDC) + aire(ABF)], d'où l'on peut tirer :

$$\text{aire(AIF)} = \frac{a}{4} + \text{aire(IDE)} \ (\boldsymbol{i})$$

D'autre part, en appliquant le théorème de Thalès à IDE et IFH, on montre que le rapport d'homothétie de ces deux triangles est $-\frac{3}{2}$. Soit $\text{aire(IFH)} = \text{aire(IDE)} \times \frac{9}{4}$.

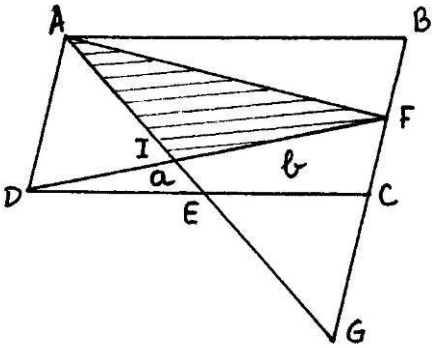
De même, AGH et ADE sont homothétiques (rapport $\frac{1}{2}$) et le rapport de leurs aires est $\frac{1}{4}$.

On obtient alors $\text{aire(AFH)} = \frac{3a}{16}$, puis $\text{aire(AIF)} = \frac{3a}{16} + \text{aire(IDE)} \times \frac{9}{4}$ (***ii***).

En combinant (***i***) et (***ii***), on obtient $\text{aire(AIF)} = \frac{3a}{10}$. CDFD.

****

Quatrième solution, proposée par Claude **BIDOIS** de GÉRARDMER :



G est le symétrique de A par rapport à E.

IDA et IFG sont homothétiques (rapport $-\frac{2}{3}$), d'où le rapport de leurs aires : $\frac{4}{9}$.

Notons a l'aire IDE et b l'aire IECF : $\text{aire(ADE)} - a = \left(\text{aire(GCE)} + b\right) \times \frac{4}{9}$ (***i***)

Soit p l'aire du parallélogramme ABCD ;

$\text{aire(ADE)} = \text{aire(CDF)} = \text{aire(GEC)} = \frac{p}{4}$.

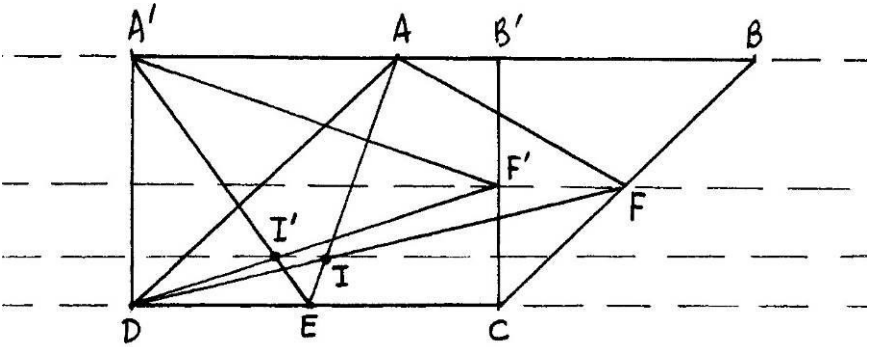
En reportant dans (i), il vient $a + \frac{4b}{9} = \frac{5p}{36}$ (***ii***).

Or aire(DIE) + aire(IEFC) = aire(DCF), d'où $a + b = \frac{p}{4}$ (***iii***).

En combinant (***ii***) et (***iii***), on obtient $a = \frac{p}{20}$ et $b = \frac{p}{5}$, et on trouve alors aisément que aire(AIF) $= \frac{3p}{10}$.

****

Une cinquième solution, de Jean **PILLOY** (lycée Varoquaux de TOMBLAINE), elle aussi résumée :
« *Où on redresse le parallélogramme à coup de transvections !* »



A' est l'intersection de (AB) et de la perpendiculaire en D à (DC). le rectangle A'B'CD et le parallélogramme ABCD ont la même aire.
On a ensuite
aire(ADE) = aire(A'DE) ; aire(A'B'F') = aire(ABF) et aire(DF'C) = aire(DFC).
Sachant que ire(AIF)
= aire(ABCD) – aire(ABF) – aire(DFC) – aire(DAE) + aire(DIE),
et que aire(AI'F')
= aire(A'B'CD) –aire(A'B'F') – aire(DF'C) – aire(DA'E) + aire(DI'E),
il reste à démontrer que aire(DIE) = aire(DI'E), c'est à dire que (I'I) parallèle à (DE).
Or A'B'CD est l'image de ABCD dans une transvection, et celle-ci conserve les barycentres, d'où $\frac{\overline{IA}}{\overline{IE}} = \frac{\overline{I'A'}}{\overline{I'E}}$.
Jean **PILLOY** démontre alors que la proposition est vraie dans le rectangle (nous laissons au lecteur le soin de faire cette démonstration).

Note de la rédaction : la transvection conserve les barycentres, mais elle conserve aussi les rapports d'aires, ce qui « accélère » d'autant la démonstration...

****

Sixième solution, de Marc **SERAY** (WOUSTVILLER) :
Comme Jean **PILLOY**, il propose d'utiliser une transvection pour transformer le parallélogramme en rectangle. Mais il résout tout le problème analytiquement.

Il utilise un repère orthonormé (D, i, j), $\vec{i}$ étant porté par DC , où le point A a pour coordonnées (x_0, y_0).

Dans ce repère, la transvection est définie par : $\begin{cases} x' = x - \dfrac{x_0}{y_0} y \\ y' = y \end{cases}$

Le déterminant de cette application affine est 1, donc elle conserve les aires.
Et elle transforme le parallélogramme ABCD eu un rectangle (A'B'CD) où A' a pour coordonnées $(0, y_0)$.
Dans ce rectangle, Marc SERAY recherche les équations de (A'E) et (DF'), où F' est le milieu de [CB'], et en déduit les coordonnées de leur point d'intersection. Les aires de tous les « petits triangles » de la figure s'en déduisent aisément...

****

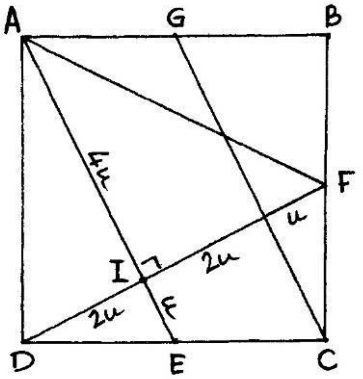
Septième solution, proposée par Jacques **VERDIER** (lycée Varoquaux, TOMBLAINE) :

- les projections affines (de l'espace) conservent les rapports des aires (sauf les projections dégénérées) ;
- il existe toujours une projection affine transformant un parallélogramme quelconque en carré (c'est exactement l'inverse de ce qu'on fait en perspective 'cavalière', où l'on transforme les carrés en parallélogrammes) ;
- il suffit de démontrer que la propriété est vraie dans un carré (voir figure ci-après), ce qui est très facile : le triangle AIF est rectangle en I, on calcule

$AE = DF = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, d'où $IF = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$, $AI = \dfrac{2\sqrt{5}}{10}$, et l'aire vaut $\dfrac{3}{10}$.

****

Solution assez proche proposée par André **VIRICEL** (VILLERS LES NANCY) :
Une fois obtenu le carré, le tracé de AE, BH, CG et DF met en évidence des triangles rectangles dont un des côtés est double de l'autre, d'où $AI = \dfrac{4}{5} AE$ puis $IF = \dfrac{3}{5} DF$; la suite comme précédemment.



Huit solutions reçues pour ce problème ... c'est bien !

Lu dans « Spirales » n°9 de mars 1990

Messieurs,
Déjà, l'écrit de la première session de l'agrégation interne vient de s'achever.
Dans la plupart des disciplines, les candidats avaient à passer deux épreuves, l'une servant à tester leur "répondant" sur leurs connaissances dans la discipline, l'autre leur "répondant professionnel", c'est-à-dire leur degré d'aptitude à évaluer le niveau des "pré-acquis" d'une classe, à construire un cours puis à imaginer des travaux dirigés s'y rapportant, et enfin à élaborer une évaluation des apprentissages réalisés.
Dans la plupart des disciplines, mais pas en mathématiques.
Pour les "pontes" qui ont proposé les sujets, seul comptait le niveau de performance en mathématiques.
On peut imaginer dès maintenant la consternation ou l'ironie des jurys concernant le niveau des copies des participants, qui ont fini leurs éludes depuis de nombreuses années, et qui ont un tout autre travail à accomplir à longueur d'années. Mais quels que soient les commentaires à venir sur la valeur en mathématiques des candidats, la nature de l'épreuve pose des questions de fond :

1) L'agrégation étant un concours de recrutement de professeurs, l'enseignement des mathématiques ne nécessite-t-il aucune compétence pédagogique et didactique ?
2) Les mathématiques, qui font dans notre société figure d'épouvantail sélectif, doivent-elles rester une discipline d'élite ou devenir une formation de base ?
Peut-être fais-je un mauvais procès d'intention, mais le choix de sélection qui a été fait pour ce concours me semble de nature à renforcer l'image de marque la plus communément répandue des "profs de maths", à savoir des individus "ultra élitistes" ne s'adressant qu'aux meilleurs de la classe, sans compréhension charnelle du monde qui les entoure. S'il me paraît souhaitable, à moi aussi, que le titre d'agrégé reste la marque d'un niveau de compétence, ne serait-il pas temps d'en élargir le champ lors d'un concours interne s'adressant à des gens qui ont eu dans un passé plus ou moins lointain à faire la preuve de leurs qualités strictement disciplinaires ?

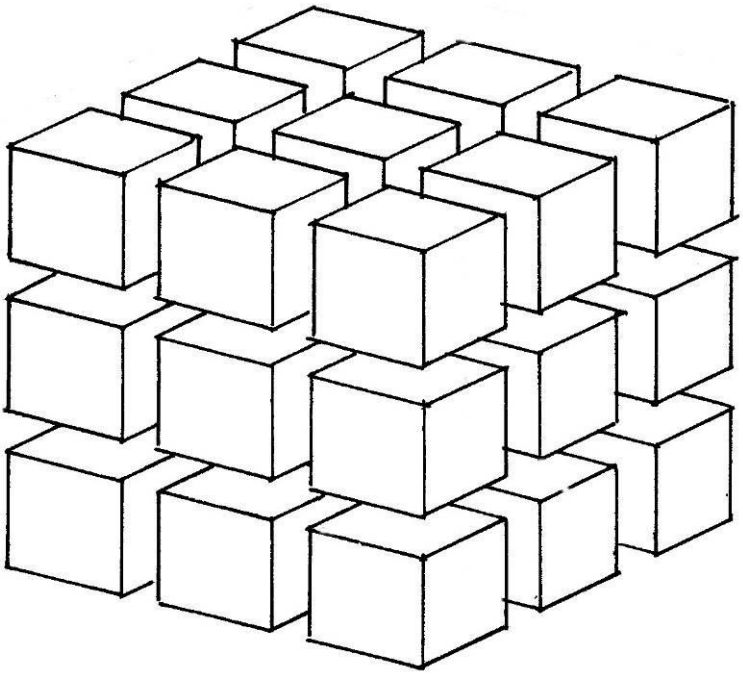
J.CLUSAZ.

Problème n°22 de juin 1990

Vous disposez de 27 petits cubes en bois blanc, et de trois pots de peinture : du rouge, du bleu et du vert.
Comment devez-vous peindre les faces de ces 27 petits cubes de façon que :

- si on les réunit d'une certaine façon, les 6 faces externes du grand cube ainsi reconstitué seront entièrement rouges ;
- si on les réunit d'une autre façon, les 6 faces externes seront entièrement vertes ;
- si on les réunit d'une troisième façon, on n'y verra que du bleu !

Votre solution n'en sera que meilleure si vous précisez les « mouvements » à faire pour passer d'une disposition à une autre.



Ce problème est inspiré de « PINTADO CUBITOS », article de Francisco **Esteban Arias**publié en 1989 dans le n°19 du bulletin de la S.C.P.M., association des professeurs de mathématiques des Iles Canaries.