

Solution du problème n°22 (PETIT VERT de juin 1990)

Vous disposez de 27 petits cubes en bois blanc, et de trois pots de peinture : du rouge, du bleu et du vert.

Comment devez-vous peindre les faces de ces 27 petits cubes de façon que :

- si on les réunit d'une certaine façon, les 6 faces externes du grand cube ainsi reconstitué seront entièrement rouges ;
- si on les réunit d'une autre façon, les 6 faces externes seront entièrement vertes ;
- si on les réunit d'une troisième façon, on n'y verra que du bleu !

Votre solution n'en sera que meilleure si vous précisez les « mouvements » à faire pour passer d'une disposition à une autre.

Première solution proposée par A. V IRICEL de V ILLERS-LES-NANCY (solutions équivalentes proposées par C. P AGANO de L A SEYNE DUR MER et par G. R OHMER de MONT-LES-NEUFCHÂTEAU) :

1°) On peint en bleu le cube comme il se présente.

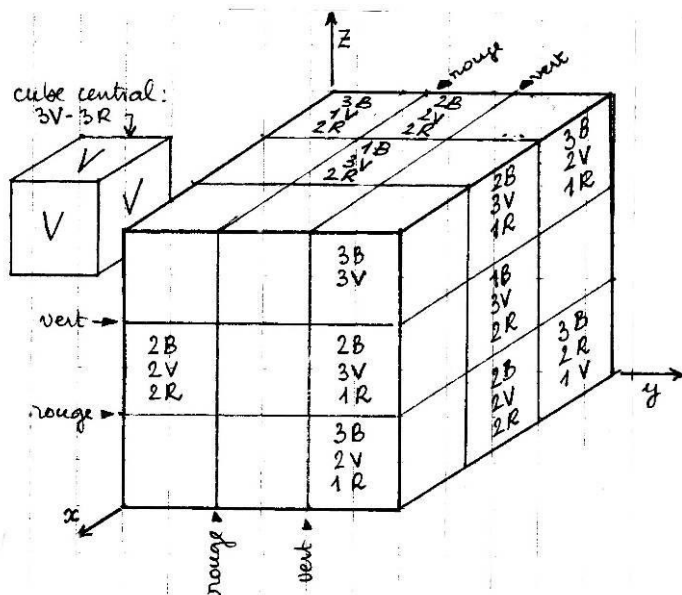
Première transformation : la couche avant passe à l'arrière,
la couche de droite passe à gauche,
la couche du dessus passe dessous.

On peint alors en vert tout le cube.

Deuxième transformation : identique à la première.

On peint alors en rouge tout le cube.

2°) "Traduction mathématique" : Le sommet 0 (qu'on ne voit pas sur la figure) est pris comme origine d'un repère rectangulaire Oxyz. Chacun des 27 cubes est repéré par les coordonnées de son sommet le plus proche de 0 (les coordonnées vont de 000 à 222).



Première transformation : on ajoute 1 modulo 3 aux trois coordonnées.

Deuxième transformation : on ajoute encore 1 modulo 3 aux 3 coordonnées.

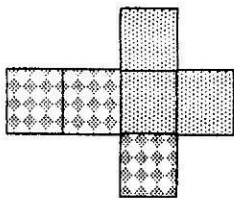
Remarques :

1. Si on fait encore une telle transformation, le cube revient à sa couleur initiale.
2. La figure ci-dessus permet de connaître, pour un petit cube déterminé, les couleurs de ses 6 faces.
3. La méthode précédente s'applique à un jeu de 64 petits cubes et 4 couleurs, 125 petits cubes et 5 couleurs, etc.
4. Sur la figure ont été indiqués les dénombrements (nombre de faces bleues, vertes et rouges de chaque petit cube) ; il est bien certain que cela ne suffit pas au peintre, qui doit connaître la disposition exacte de ces couleurs.

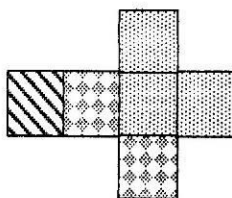
Deuxième solution, de Marc SERAY (Woustviller) :

Remarquons tout d'abord que pour pouvoir réaliser trois gros cubes de couleurs respectives bleue, verte et rouge nous devons disposer, sur l'ensemble des petits cubes, de 9 faces rouges pour chacune des faces du gros cube rouge soit $9 \times 6 = 54$ faces rouges mais aussi de 54 faces bleues et de 54 faces vertes ; finalement un total minimum de $3 \times 54 = 162$ faces peintes. Or nous disposons de $27 \times 6 = 162$ faces à peindre ; ainsi chaque face disponible doit être peinte et sert à une et une seule configuration du gros cube.

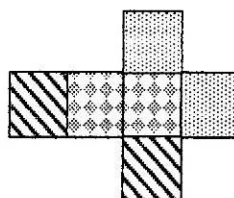
Dans un deuxième temps nous pouvons observer que les couleurs peintes sur chacun des petits cubes ne peuvent apparaître que dans des positions particulières. Considérons en effet un petit cube possédant des faces de couleur X (choisie parmi les couleurs bleue, verte et rouge), il sert à configurer le gros cube de couleur X soit en l'un de ses sommets : il possède alors trois faces et trois seulement de couleur X ayant un sommet commun, soit au milieu de l'une de ses arêtes : il possède alors deux faces et deux seulement de couleur X ayant une arête commune, soit au centre de l'une de ses faces : il n'a alors qu'une seule face de couleur X. Cette remarque nous montre que nous ne pouvons peindre que trois types de petits cubes dont les patrons sont les suivants :



Cube bicolor 3-3-0



Cube tricolor 3-2-1



Cube tricolor 2-2-2

Examinons maintenant le petit cube central dans le gros cube de couleur X ; celui-ci ne contient aucune face de couleur X sinon il y **aurait sur l'ensemble** des 27 petits cubes au moins 55 faces peintes de couleur X : les 54 montrées sur la surface du gros cube plus une face cachée sur le cube central ; résultat qui contredit notre première remarque. Ce petit cube est donc nécessairement du type bicolor 3Y-3Z (3 faces de couleur Y, 3 faces de couleur Z). Le gros cube devant posséder trois configurations l'une bleue, l'autre verte, la troisième rouge nous devons donc peindre exactement trois cubes bicolores : l'un comportant 3 faces rouges et 3 faces vertes, l'autre comportant 3 faces bleues et 3 faces rouges, le troisième comportant 3 faces vertes et 3 faces bleues.

Résumons dans un tableau les différents types de cubes utilisables : ceux-ci correspondent aux colonnes, chaque case indique le nombre de faces de la couleur indiquée en début de ligne (B pour bleu, V pour vert, R pour rouge), enfin, la dernière ligne indique le nombre de cubes de chaque type :

R	3	3	0	3	3	2	2	2	1	1
Y	3	0	3	1	2	3	2	1	3	2
B	0	3	3	2	1	1	2	3	2	3
nb.	1	1	1	x	y	z	t	u	v	w

A ce stade x, y, z, t, u, v, w sont des entiers inconnus. En étudiant la configuration rouge du gros cube nous sommes conduits aux équations suivantes :

$$2 + x + y = 8 \text{ (il y a 8 cubes sommets du gros cube rouge),}$$

$$z + t + u = 12 \text{ (il y a 12 cubes milieux des arêtes du gros cube rouge),}$$

$$v + w = 6 \text{ (il y a 6 cubes centres des faces du gros cube rouge).}$$

En étudiant de la même manière les configurations verte et bleue du gros cube nous voyons que la recherche d'une solution du problème équivaut à la résolution du système linéaire

$$\begin{cases} (1) x + y = 6 \\ (2) z + t + u = 12 \\ (3) v + w = 6 \\ (4) z + v = 6 \\ (5) y + t + w = 12 \\ (6) x + u = 6 \\ (7) u + w = 6 \\ (8) x + t + v = 12 \\ (9) y + z = 6 \end{cases}$$

(3) et (4) entraînent $z = w$, de même (1) et (6), (1) et (9), (3) et (7), (4) et (9), (6) et (7) entraînent respectivement $u = y, x = z, u = v, y = v$ et $x = w$. De plus $x = z, y = u, (1)$ et (2) entraînent $t = 6$. Après vérification le système est équivalent à :

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ t = 6 \\ x = z = w \\ y = u = v \end{cases}$$

On voit donc qu'il y a six solutions à notre problème chacune correspondant au choix du couple d'entiers positifs (x, y) vérifiant $x + y = 6$. Parmi ces six solutions, deux utilisent un minimum de types de cubes et peuvent donc être considérées comme plus simples ; ces solutions sont équivalentes, à une permutation des couleurs près :

$$\begin{array}{lll} \text{ou} & x = z = w = 6, & y = u = v = 0, & t = 6 \\ & x = z = w = 0, & y = u = v = 6, & t = 6. \end{array}$$

Pour ces dernières solutions, lors d'un changement de couleur :

- le cube central permute avec l'un des cubes bicolores sommets,
- le dernier cube bicolore montre ses faces cachées,
- les six cubes tricolores du type 2-2-2 tournent simplement sur eux-mêmes,
- les trois types de cubes tricolores 3-2-1 restent et occupant respectivement les positions sommets, milieux d'arêtes, centres de faces du gros cube permutent circulairement celles-ci.

Pour aller plus loin, nous avons reçu de Franck V ASSEUR (METZ) un dossier complet qui généralise le problème. Voici une phrase extraite de sa lettre:

« Avec tous mes remerciements pour vos problèmes qui nous rappellent avec bonheur que faire des mathématiques, c'est chercher à comprendre... »

ÉTUDE DU CAS GENERAL POUR UN CUBE $n \times n \times n$

I. Nombre de couleurs possibles

Nombre total de faces des petits dés : $6n^3$

Nombre de faces visibles : $6n^2$

Nombre de couleurs possibles : $\frac{6n^3}{6n^2} = n$.

II. Les différents types de petits cubes

Il y a quatre types différents de cubes constituant le grand cube

- les cubes présentant trois faces contiguës visibles d'une même couleur (les coins du gros cube), notés T par la suite ;
- les cubes présentant deux faces contiguës visibles de cette couleur, (notés D) ;
- les cubes en présentant une seule face visible (notés U)
- les cubes n'en présentant aucune face visible (notés O).

La répartition de ces cubes est la suivante (voir tableau) :

O	$(n-2)^3$
U	$3 \times 2^1 \times (n-2)^2$
D	$3 \times 2^2 \times (n-2)$
T	2^3
total	n^3

III. LES ÉCRITURES DE 6 COMME SOMME DE 1, 2 et 3

Si l'on colorie les 6 faces de chacun des petits cubes avec plusieurs couleurs, on constate qu'il y a a priori (pour $n \geq 6$) les configurations suivantes :

coloriage des 6 faces		U	D	T
T + T	*	0	0	2
T + D + U		1	1	1
D + D + D	*	0	3	0
T + U + U + U		3	0	1
D + D + U + U	*	2	2	0
D + U + U + U + U		4	1	0
U + U + U + U + U + U		6	0	0

Il est également indiqué, dans le tableau de droite, combien de fois apparaît, pour chaque configuration, le coloriage de trois faces contiguës de la même couleur (T), de deux (D), etc. Toutes ces configurations sont réalisables sur un cube pour $n \geq 6$. Pour $n = 3$, seules les trois premières le sont, du fait qu'on ne dispose que de trois couleurs. Les trois configurations marquées d'un astérisque permettent de venir facilement à bout du cas général (voir tableau en annexe).

IV. TABLEAUX DE COLORIAGE

Chaque colonne décrit le coloriage d'un petit cube. Le coefficient multiplicateur qui la surmonte indique le nombre de petits cubes ayant ce coloriage. La présence d'un T indique que trois faces contiguës sont coloriées de la couleur correspondant à la ligne sur laquelle se trouve T ; même chose avec D, U et O.

Pour 24 cubes ; 3 couleurs.

couleur	6x	2x	1x
a	U T D	D D D	O T T
b	D U T	D D D	T O T
c	T D U	D D D	T T O

Pour 64 cubes ; 4 couleurs

couleur	4x	12x
a	O T T O	U D D U
b	O O T T	U U D D
c	T O O T	D U U D
d	T T O O	D D U U

Pour 125 cubes ; 5 couleurs

couleur	1x	18x	6x
a	O T T O O	O D D U U	O T U U U
b	O O T T O	U O D D U	U O T U U
c	O O O T T	U U O D D	U U O T U
d	T O O O T	D U U O D	U U U O T
e	T T O O O	D D U U O	T U U U O

couleur	8x	24x
a	O T U D	
b	O T U D	
c	T O D U	
d	T O D U	

Pour 64 cubes (4 couleurs),
minimum de configurations

Pour 125 cubes (5 couleurs), maximum de configurations :

couleur	2x	2x	6x	2x	3x	10x
a	T O O O T	T O O O U	D D O O D	D T O U U U	D O U U D	D U U U U
b	T T O O O	D T O O U	D O O D D	U T O U U U	D O U U U	D U U U U
c	O T T O O	U D T O O	D D O O U	U U T O U	U D O U U	D U U U U
d	O O T T O	U D T O O	D D O O U	U U T O U	U D O U U	D U U U U
e	O O O T T	U D T O O	D D O O U	U U T O U	U D O U U	D U U U U

Le jeu des permutations verticales permet de faire en sorte que chaque sigle (T, D ou U) apparaisse autant de fois par ligne que par colonne, c'est à dire dans la décomposition de 6 retenus (cf. tableau du § III).

Pour le cas général ($n \geq 6$), voir le tableau en annexe page 16.

V. GENERALISATION A UN PAVÉ $n \times p \times q$

Reprenons l'étude précédente dans l'ordre :

Nombre de faces : $6npq$

Nombre de faces visibles : $2(np + pq + qn)$

Ainsi $(np + pq + qn)$ doit diviser $3npq$, et le nombre de couleurs k est le quotient

$$\frac{3npq}{np + pq + qn}$$

La répartition est

nombre de T : 8

nombre de 0 : $4(n-2) + 4(p-2) + 4(q-2)$

nombre de U : $2(p-2)(q-2) + 2(q-2)(n-2) + 2(n-2)(p-2)$

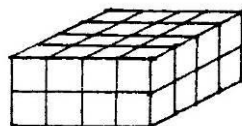
nombre de 0 : $(n-2)(p-2)(q-2)$

Le § III (décompositions de 6) n'est aucunement modifié.

Prenons l'exemple où l'on dispose de trois couleurs ($k = 3$). On constate, d'après ce qui précède, que les seuls pavés qui conviennent ont pour dimensions $2 \times 3 \times 6$ ou $2 \times 4 \times 4$.

Dans le premier cas, la répartition est 8 T, 20 D, 8 U et aucun 0, et le tableau de coloriage est le suivant :

couleur	8x			4x		
a	U	T	D	D	D	D
b	D	U	T	D	D	D
c	T	D	U	D	D	D



Dans le second cas, la répartition est 8 T, 16 D, 8 U et aucun 0, et le tableau de coloriage est :

couleur	8x			4x		
a	U	T	D	D	D	D
b	D	U	T	D	D	D
c	T	D	U	D	D	D



N.D.L.R. Le groupe "jeux" serait heureux de connaître les solutions pour 4 couleurs, afin de pouvoir réaliser (en bois peint) les pavés correspondants.

Annexe (cas $n \geq 6$) page suivante...

ANNEXE

Tableau général de coloriage de n^3 cubes avec n couleurs (pour $n \geq 6$).

Couleur	$\times (n-2)^2$				$\times 4(n-2)$				$\times 4$			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U
2		U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U
3			U	U	U	U	U	U	U	U	U	U
4				U	U	U	U	U	U	U	U	U
5					U	U	U	U	U	U	U	U
6						U	U	U	U	U	U	U
7							U	U	U	U	U	U
8								U	U	U	U	U
9									U	U	U	U
10										U	U	U
11											U	U
12												U
n-6												
n-5												
n-4												
n-3												
n-2												
n-1												

PROBLÈME

DU TRIMESTRE
N° 23

proposé par Christiane ROHMER (NEUFCHÂTEAU)

D'après un exercice du manuel TRANSMATH (Nathan) de terminale A-B.

On considère un cercle sur lequel on prend n points ($n \geq 2$).
On dessine toutes les cordes joignant deux de ces points. On suppose que trois quelconques de ces cordes ne sont pas concourantes.

Notons R_n le nombre de régions intérieures au cercle ainsi délimitées.

Déterminer R_2 , R_3 , R_4 , R_5 .

Qu'êtes-vous tenté de conjecturer pour R_n ?

Déterminer R_6 à l'aide d'un dessin ; confrontez votre conjecture à ce résultat.

Le but de cet exercice est de mettre les élèves en garde contre des conjectures trop hâtives... mais il ne donne pas la solution du problème : calculer R_n en fonction de n .

LU DANS TÉLÉRAMA :

Fiable, inaltérable, inusable, le CD a sauvé la musique du couac et les maisons de disques de la faillite. Histoire d'un miracle. ↗

**En quatre ans,
le prix
du CD
a baissé de
300 %.**

En quatre ans, les prix ont chuté de 300 %. Un CD sorti d'usine (support + boîtier + livret quatre pages) revient royalement à 8,50 F hors taxe.

Problème : à combien revenait-il donc (hors taxe) il y a quatre ans ?