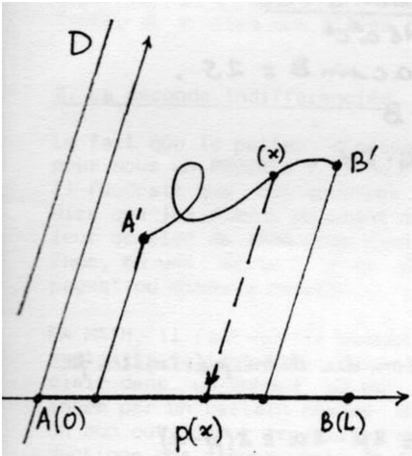
PROBLÈME RÉSOLU (LE PROBLÈME "DU POINT FIXE")

Un fil non extensible occupe initialement la position [AB], [AB] étant un segment de droite du plan P.
On tord ce fil, et on le repose sur le plan P, où il occupe alors la position A'B' (qui est une courbe plane continue).
Soit D une direction du plan telle que tous les points de A'B' se projettent sur la droite (AB), parallèlement à D, à l'intérieur (au sens large) du segment [AB].
Démontrer qu'il existe au moins un point de A'B' qui se projette à la place qu'il occupait initialement sur AB.

Démonstration



Considérons le repère d'origine A, dont l'axe des abscisses a pour vecteur directeur $\vec{AB}$, et l'axe des ordonnées un vecteur directeur de D.
Soit L la longueur du fil (L = AB).
Chaque point du fil sera désigné par l'abscisse x qu'il avait dans sa position originale : 0 < x < L.
Soit p(x) l'abscisse de la projection de ce point.
Il s'agit donc de démontrer qu'il existe au moins une valeur de x telle que p(x) = x.
Si le point A' se projette en A, ou si B' se projette en B, la proposition est démontrée.
Dans les autre cas, on a p(0) > 0 et p(L) < L.
Soit i l'application identique de [0 ; L] dans lui-même.
p(0) > i(0) et p(L) < i(L), soit (p-i)(0) >0 et (p-i)(L) < L.
Autrement dit, dans l'intervalle [0 ; L], cette fonction (p-i) a au moins une valeur strictement négative, et au moins une valeur strictement positive.
Or (p-i) est une fonction continue, car p et i le sont.
Il existe donc au moins un nombre x de [0 ; L] tel (p-i)(x)=0.
Pour ce nombre x, on a bien p(x) = i(x), c'est-à-dire p(x) = x, ce qu'il fallait démontrer.

M. PUISSÉGUR, NEVERS

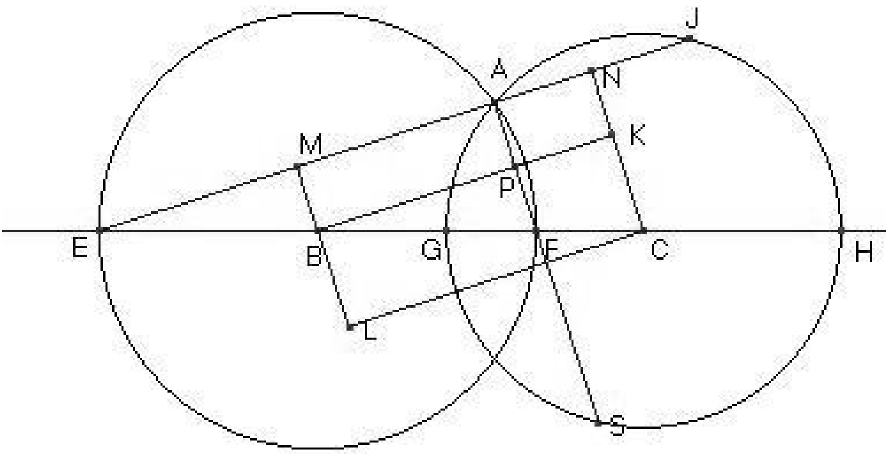
Correction du problème du trimestre n°16

Rappel de l'énoncé : Soit un triangle ABC dont les angles B et C sont aigus.
On trace le cercle Ω de centre B passant par A, qui coupe la droite (BC) en E et F, et le cercle de centre C passant par A, qui coupe la droite (BC) en G et H. les points E, F, G, H se succèdent dans cet ordre.

1°) Démonter que $EF \times EH \times FG \times FH = 16 \times (aire\ ABC)^2$

2°) En déduire la formule de l'aire du triangle : $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Solution proposée par André **VIRICEL**.



Sur la figure ci-dessus, $BK = MN = \dfrac{EJ}{2}$ et $BL = PQ = \dfrac{FS}{2}$:

1°) Les angles CBK , KBA , BEA et BCL (voir figure) sont égaux à $\dfrac{B}{2}$.

$$\cos BEA = \cos\frac{B}{2} = \frac{EA}{EF} = \frac{EA}{2c} \quad \text{et} \quad \cos CBK = \cos\frac{B}{2} = \frac{BK}{BC} = \frac{EJ}{2a}$$

$$\Rightarrow \left(\cos\frac{B}{2}\right)^2 = \frac{EA \times EJ}{4ac} \quad (1)$$

$$\sin CBK = \sin\frac{B}{2} = \frac{FA}{EF} = \frac{FA}{2c} \quad \text{et} \quad \sin BCL = \sin\frac{B}{2} = \frac{BL}{BC} = \frac{FS}{2a}$$

$$\Rightarrow \left(\sin\frac{B}{2}\right)^2 = \frac{FA \times FS}{4ac} \quad (2)$$

Or puissance de E pour le cercle (C, CA) = $\overline{EA}\times\overline{EJ} = \overline{EG}\times\overline{EH}$,

et puissance de F pour le cercle (C, CA) = $\overline{FA}\times\overline{FS} = \overline{FG}\times\overline{FH}$.

En multipliant (1) et (2) membre à membre, il vient

$$\left(\cos\frac{B}{2}\right)^2\left(\sin\frac{B}{2}\right)^2 = \frac{EG\times EH\times FG\times FH}{16a^2c^2}$$

Mais $\sin B = 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$ et a.c.sinB = 2S.

Donc $EG\times EH\times FG\times FH = 4a^2c^2(\sin B)^2$, d'où $16S^2 = EG\times EH\times FG\times FH$

2°) EG = EB + BC – CG = c + a – b,
EH = EB + BC + CH = c + a + b
FG = FB – BC + CG = c – a + b,
FH = - FB + BC + CH = - c + a + b

Ces quatre segments s'expriment en fonction du demi-périmètre p et d'un côté :

EG = 2p – 2b = 2(p – b),
FG = 2p – 2a = 2(p – a)
EH = 2p,
FH = 2p – 2c = 2(a – c).

Donc $16S^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c)$ soit $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Problème du trimestre n°17

proposé par M. **PUISSÉGUR,** de Nevers

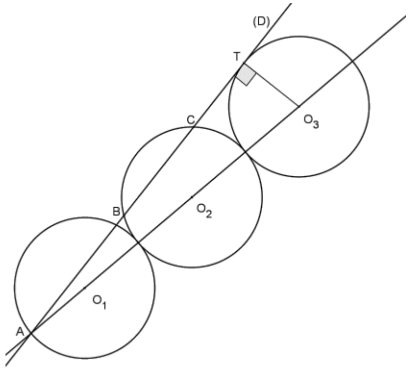
Une feuille de papier rectangulaire est posée sur un plan horizontal. On la froisse, et on repose l'objet sur le plan, de telle manière qu'aucun point ne se projette verticalement en dehors de l'aire initialement occupée par la feuille.

En général, un point ne se projette pas à l'emplacement qu'il occupait auparavant. Démontrer qu'il existe cependant AU MOINS UN POINT ayant cette propriété.

N.d.l.r. Si vous ne pouvez pas « démarrer », le problème résolu de la page 12 pourra peut-être vous aider.

Un beau problème pour vos secondes (proposé aux quats de finale du championnat de France 1989 de jeux mathématiques).

LES TROIS CERCLES



Les cercles (1), (2) et (3) ont 2 mètres de diamètre.
La droite (D) est tangente au cercle (3), c'est-à-dire O_3T perpendiculaire à AT.
Quelle est la longueur, en mètres, de BC ? (arrondir à 2 décimales).