

LE PROBLÈME DU TRIMESTRE N° 18

Prenez une classe de seconde bien ordinaire : 37 élèves, au bas mot. Rangez-les dans n'importe quel ordre (par taille, par date de naissance, par ordre alphabétique...) ou même dans le plus grand désordre.

Alors il y en a au moins 7, non nécessairement consécutifs, qui sont rangés dans l'ordre croissant (sinon, dans l'ordre décroissant) de leur moyenne annuelle en mathématiques !

Plus généralement ; dans toute liste de $n^2 + 1$ éléments, on peut extraire une sous-liste d'au moins $n + 1$ éléments tels que ceux-ci soient rangés soit dans l'ordre croissant, soit dans l'ordre décroissant, quelle que soit la relation d'ordre choisie.

Solution pour le problème n° 17

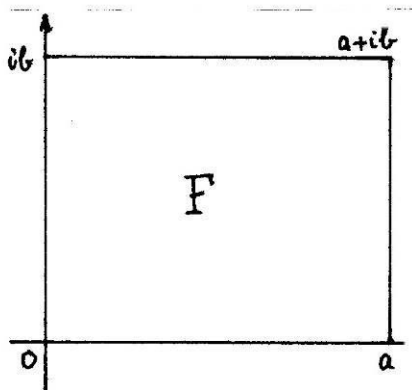
Problème proposé par M. **PUISSÉGUR** de Nevers.

Rappel de l'énoncé : Une feuille de papier rectangulaire est posée sur un plan horizontal. On la froisse, et on repose l'objet sur le plan, de telle manière qu'aucun point ne se projette verticalement en dehors de l'aire initialement occupée par la feuille.

En général, un point ne se projette pas à l'emplacement qu'il occupait auparavant. Démontrer qu'il existe cependant **AU MOINS UN POINT** ayant cette propriété.

Solution de Marc **SERAY**, de Sarreguemines (Lycée Nominé).

Schématisons la feuille de papier initiale par un rectangle fermé F du plan complexe, de sommets O , a , ib et $a+ib$, où a et b sont deux réels strictement positifs.



Effectuons les opérations indiquées par l'énoncé.

Deux points quelconques se trouvent rapprochés dans le froissement ; par projection, la distance des deux points diminue encore.

Nous construisons ainsi une application Φ de F vers F qui vérifie la propriété :

quel que soit $(z_1, z_2) \in F^2$, $|\Phi(z_1) - \Phi(z_2)| \leq |z_1 - z_2|$.

Φ est donc continue sur F .

Le problème peut alors s'interpréter de manière suivante : **soit Φ une application de F vers F qui diminue la distance, montrons que Φ admet au moins un point fixe.**

Dans une première partie, considérons, pour chaque x de $[0, a]$, l'ensemble $E_x = \{x + iy ; y \in [0, b]\}$ et montrons que chaque E_x admet au moins une solution à l'équation $(\Xi) : \text{Im}(\Phi(z)) = \text{Im}(z)$, $\text{Im}(z)$ désignant la partie imaginaire de z .

Considérons pour cela l'application :

$$\chi : F \rightarrow F, z \rightarrow \text{Im}(\Phi(z)) - \text{Im}(z).$$

Les applications Φ et Im étant continues, l'application χ l'est aussi.

De plus :

$$\begin{aligned} \chi(x+ib) &= \text{Im}(\Phi(x+ib)) - b \leq 0 \\ \text{et } \chi(x) &= \text{Im}(\Phi(x)) - 0 \geq 0. \end{aligned}$$

Pour chaque x appartenant à $[0, a]$, E_x étant un segment de F est connexe, et $\chi(E_x)$ est donc un intervalle contenant 0 ; autrement dit, l'équation (Ξ) a bien au moins une solution dans E_x .

Considérons alors $E = \{z \in F ; \text{Im}(\Phi(z)) = \text{Im}(z)\}$ et montrons que E contient au moins une solution z_0 à l'équation $(\Xi') : \text{Re}(\Phi(z)) = \text{Re}(z)$.

Procédons par l'absurde en supposant que (Ξ') n'ait pas de solution dans E .

Les deux ensembles définis par $E_1 = \{z \in E ; \text{Re}(\Phi(z)) > \text{Re}(z)\}$ et $E_2 = \{z \in E ; \text{Re}(\Phi(z)) < \text{Re}(z)\}$ forment une partition de E .

Or il est clair que $E = \chi^{-1}(\{0\})$, fermé dans F compact, est compact.

$$E_1 = \theta^{-1}(]0 ; +\infty[) = \theta^{-1}([0 ; +\infty[),$$

où θ est l'application $E \rightarrow \mathbf{R}, z \rightarrow \text{Re}(\Phi(z)) - \text{Re}(z)$.

θ étant continue, E_1 fermé dans E compacte est donc compact.

En remarquant que $E_2 = \theta^{-1}(]-\infty ; 0]) = \theta^{-1}([-\infty ; 0])$ on montre aussi que E_2 est compact.

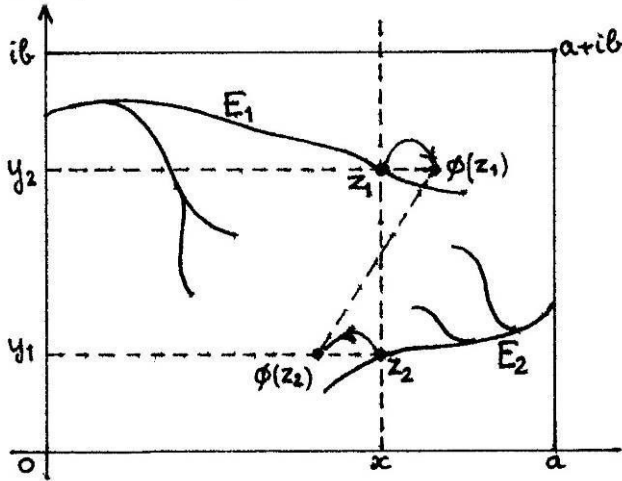
Projetons alors E_1 et E_2 sur l'axe réel en utilisant l'application continue $\pi : z \rightarrow \text{Re}(z)$.

$\pi(E_1)$ et $\pi(E_2)$ sont des compacts, donc fermés sur $[0 ; a]$.

De plus $\pi(E_1) \cup \pi(E_2) = \pi(E_1 \cup E_2) = \pi(E)$.

Or la première partie de la démonstration montre que $\pi(E) = [0 ; a]$. Nous avons donc recouvert le connexe $[0 ; a]$ par deux fermés $\pi(E_1)$ et $\pi(E_2)$ nécessairement non disjoints.

Autrement dit, il existe $x \in [0 ; a]$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, avec y_1 et y_2 dans $[0 ; b]$ tels que $z_1 \in E_1$ et $z_2 \in E_2$.



On en déduit alors que

$$\Phi(z_1) = x_1 + iy_1 \text{ avec } x_1 > x \text{ et } \Phi(z_2) = x_2 + iy_2 \text{ avec } x_2 < x,$$

$$\text{d'où } |\Phi(z_1) - \Phi(z_2)| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} > |y_1 - y_2| = |z_1 - z_2|$$

Cette dernière égalité contredit l'hypothèse de diminution des distances.

L'équation (Ξ') admet donc au moins une solution dans E .

Soit z_0 une telle solution. $\text{Im}(\Phi(z_0)) = \text{Im}(\Phi(z))$, puisque z_0 est dans E , et $\text{Re}(\Phi(z_0)) = \text{Re}(\Phi(z))$, puisque z_0 est solution de (Ξ') . Ainsi, $\Phi(z_0) = z_0$, et Φ a bien un point fixe dans F .

C.Q.F.D.

Il est clair que la technique de démonstration exposée ici permet d'étendre le résultat à un pavé fermé de $\mathbf{R}^n$, par récurrence sur n . On peut ainsi énoncer le résultat suivant : **si Φ est une application de F , pavé de $\mathbf{R}^n$, qui diminue la distance, alors elle admet au moins un point fixe.**

La démonstration qui vient d'être faite utilise la compacité et la connexité de F .

On pourrait se demander alors si une application Φ de K , compact connexe (et non plus pavé) de $\mathbf{R}^n$, sur K , et qui diminue (au sens large) la distance, admet encore un point fixe.

Il n'en est rien. En voici un contre-exemple : prenons une couronne circulaire K de $\mathbf{R}^2$, et comme application Φ une rotation de centre O ; elle diminue la distance (au sens large : c'est une isométrie), et elle n'a pas de point fixe, son centre ayant été « exclu » de la couronne K .

Terminons alors sur la question ouverte suivante : quelle condition supplémentaire (la plus faible possible) faut-il ajouter pour que la proposition soit vraie. En particulier, suffit-il que K soit un compact **simplement connexe** de $\mathbf{R}^n$ (c'est à dire « sans trou ») ?
