

SOLUTION DU PROBLEME N° 18

Rappel de l'énoncé : Prenez une classe de seconde bien ordinaire : 37 élèves, au bas mot. Rangez-les dans n'importe quel ordre : par taille, par date de naissance, par ordre alphabétique, voire même rangez-les dans le plus grand désordre (!).

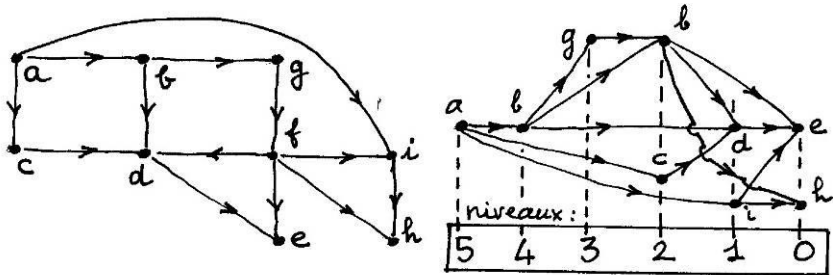
Alors il y a **au moins 7 élèves** (non nécessairement consécutifs) qui sont rangés **dans l'ordre croissant** (sinon décroissant) de leur moyenne annuelle de mathématiques !

Plus généralement : de toute liste de $n^2 + 1$ éléments, on peut extraire une sous-liste d'au moins $n + 1$ éléments tels que ceux-ci soient rangés soit dans l'ordre croissant, soit dans l'ordre décroissant, quelle que soit la relation d'ordre choisie.

Personne n'ayant envoyé de solution, nous proposons celle de l'auteur du problème, Jacques VERDIER.

Soit un graphe orienté, sans circuit, sur un ensemble E. Représentons le par niveaux.

Voici un exemple d'un tel graphe et de sa représentation par niveaux :



On pourrait définir le niveau d'un point par :

niveau (x) = sup (lgr (K)) où K est un chemin d'origine x, et lgr(K) désigne sa longueur.

Exemple : sur le graphe schématisé ci-dessus, niveau(b) = 4, car le plus long chemin d'origine b est $b \rightarrow g \rightarrow f \rightarrow d \rightarrow e$, de longueur 4

Soit L le niveau maximum du graphe (c'est à dire la longueur du plus grand chemin, qui contiendra ainsi L+1 points).

On classe les points par niveau (voir figure de droite, exemple ci-dessus).

Soit k' le maximum du nombre de points par niveau ($k' = 2$ dans l'exemple ci-dessus) ; soit k le cardinal de la plus grande suite d'éléments deux à deux incomparables.

Comme tous les points d'un même niveau sont incomparables (conséquence immédiate de la notion de niveau), on a $k' < k$.

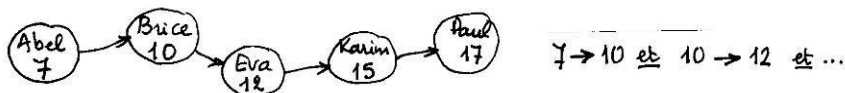
Soit m le cardinal de l'ensemble E (c'est à dire le nombre de sommets du graphe).

Il est évident que $m \leq (L+1)k'$ (il y a $L+1$ niveaux contenant au maximum k' points).

De ces deux dernières inégalités, on tire $m \leq (L+1)k$, qui est une propriété « connue » de la théorie des graphes.

Appliquons cette propriété à la liste des 37 élèves de l'énoncé, liste que l'on peut représenter par un graphe pour la relation suivante, notée $\rightarrow$ et définie ainsi : on a $A \rightarrow B$ si A est placé avant B dans la liste initiale des élèves et si la moyenne de A est inférieure à celle de B . Ce graphe est évidemment sans circuit.

Une suite croissante est un chemin de ce graphe, par exemple :



Une suite décroissante est une suite de points deux à deux incomparables par la relation $\rightarrow$:



On a ici $m = 37 = n^2 + 1$.

La propriété démontrée ci-dessus donne $(L+1)k \geq n^2 + 1$

D'où $(L+1) > n$ ou $k > n$.

- Si $(L+1) > n$, alors $L \geq n$: sa longueur étant supérieure ou égale à n , le plus long chemin contient au moins $n+1$ points rangés dans l'ordre $\rightarrow$, c'est-à-dire à la fois dans l'ordre initial de la liste et dans l'ordre croissant des moyennes.
- Si $k > n$, alors $k \geq n+1$: il y a au moins $n+1$ points qui sont incomparables pour la relation $\rightarrow$: ils forment une suite d'au moins $n+1$ points, croissante dans l'ordre initial de la liste et décroissante pour les moyennes.

La propriété énoncée est ainsi démontrée.

Le problème du trimestre, n°19

En utilisant des pièces de 5 centimes, de 10 centimes, de 20 centimes, de 50 centimes, de 1 Franc, de 2 Francs et de 5 Francs, de combien de façons différentes peut-on faire la monnaie d'un billet de 10 Francs ?