104 560 :

SOLUTION DU PROBLEME N° 19

Rappel de l'énoncé : De combien de façons différentes peut-on faire la monnaie d'un billet de 10 F en utilisant les pièces de 5 ç, de 10 ç, de 20 ç, de 50 ç, de 1 F, de 2 F et de 5 F ?

Soit A(n) le nombre de façons de faire la monnaie en n'utilisant que les pièces de 0,05 F. (N.B. Dans toute cette solution, n est un multiple entier de 0,05, par exemple n = 7,65).
Soit B(n) le nombre de façons de faire la monnaie en n'utilisant que les pièces de 0,05 F ou de 0,10 F.
Soit C(n) le nombre de façons de faire la monnaie en n'utilisant que les pièces de 0,05 F ou de 0,10 F ou de 0,20 F.
On définit de même D(n), E(n), F(n) et G(n).
L'énoncé nous demande de calculer G(10).

On a les relations suivantes : **G(n) = F(n) + G(n-5).**
En effet, on peut faire la monnaie de n francs soit en n'utilisant aucune pièce de 5 francs, et on a alors F(n) façons de la faire, soit en prenant une pièce de 5 francs et en faisant la monnaie du reste, et on a alors G(n-5) façons de le faire.

De la même façon, on a :
F(n) = E(n) + F(n-2) ; E(n) = D(n) + E(n-1) ; D(n) = C(n) + D(n-0,5) ;
C(n) = B(n) + C(n-0,2) ; B(n) = A(n) + B(n-0,1)
et A(n) = 1 pour tout n : en effet, il n'y a qu'une seule façon de faire la monnaie de n uniquement avec des pièces de 5 cents.
Par convention A(n) = B(n) = C(n) = D(n) = E(n) = F(n) = G(n) = 1 pour n = 0,
et A(n) = B(n) = C(n) = D(n) = E(n) = F(n) = G(n) = 0 pour tout n négatif.

En utilisant les sept relations de récurrence ci-dessus, on peut construire pas à pas le tableau suivant, sachant que la première ligne et la première colonne ne contiennent que des 1.

n	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40...
A	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B	1	1	2	2	3	3	4	4	5
C	1	1	2	2	4	4	6	6	9
D	1	1	2	2	4	4	6	6	9
etc.	1								

Avec un peu de courage, vous irez jusqu'à la 201ème colonne 7ème ligne !

Le mieux est d'utiliser un programme informatique pour automatiser ces calculs.
Voici un exemple en Pascal, qui traduit directement cet algorithme et qui, en 15 secondes *(en décembre 1989, n.d.l.r.)* sur PC conduisait à la réponse : il y a **104 560** façons différentes de faire la monnaie de 10 francs.

```
program monnaie ;
function b(n:real):longint ;
      begin if n<0 then b:=0 else if n=0 then b:=1
      else b:=1+b(n-0.1) end ;
function c(n:real):longint ;
      begin if n<0 then c:=0 else if n=0 then c:=1
      else c:=b(n)+c(n-0.2) end ;
function d(n:real):longint ;
      begin if n<0 then d:=0 else if n=0 then d:=1
      else d:=c(n)+d(n-0.5) end ;
function e(n:real):longint ;
      begin if n<0 then e:=0 else if n=0 then e:=1
      else e:=d(n)+e(n-1) end ;
function f(n:real):longint ;
      begin if n<0 then f:=0 else if n=0 then f:=1
      else f:=e(n)+f(n-2) end ;
function g(n:real):longint ;
      begin if n<0 then g:=0 else if n=0 then g:=1
      else g:=f(n)+g(n-5) end ;
begin {programme principal}
      writeln(g(10))
end.
```

Nous avons reçu d'un lecteur anonyme (étourderie de sa part ?) deux autres programmes de résolutions de ce problème. Nous vous en proposons un, qui donne la solution en 17 minutes environ :

```
Programme pour_Le_Petit_Vert; (* version récursive *)
Const somme =1000
function compte(s,rang:integer):longint;
var    petite,i:integer;
       contloc:longint;
begin
case rang of 1:petite:=500;
             2:petite:=200;
             3:petite:=100;
             4:petite:=50;
             5:petite:=20;
             6:petite:=10;
             7:petite:=5;
end;
contloc:=0:
```

```
if ((s>=petite)and(rang>=l)) then
       for i:=0 to trunc(s/petite) do
              if i*petite=s then contloc:=succ(contloc)
              else contloc:=contloc+compte(s-i*petite,rang-l);
compte:=contloc;
end;
begin
writeln('Il y a ',compte(somme,?), 'solutions');
end.
```

Nous avons également reçu une solution de Denis **PÉPIN** (de Verdun) :

Il s'agit de dénombrer les solutions entières de l'équation
$5x + 10y + 20z + 50u + 100v + 200w + 500t = 1000$.
Si l'on pose $a = x + 2y + 4z$ et $b = u + 2v + 4w$, elle s'écrit $a + 10b + 100t = 200$.
Il est facile d'énumérer les solutions entières de cette équation.

Pour K entier, déterminons les solutions entières de $x + 2y + 4z = K$. Pour cela, on n distinguera suivant la classe de K modulo 4.

Si K = 4k — Il y a une solution pour laquelle z = k, c'est (0 ; 0 ; k), et trois solutions pour lesquelles z = k-1, ces sont (0 ; 2 ; k-1), (2 ; 1 ; k-1) et (4 ; 0 ; k-1).
Plus généralement 2r+1 solutions avec z = k-r qui correspondent aux 2r+1 valeurs de y : $0 \leq y \leq 2r$, donc $1 + 3 + 5 + ... + (2k+1) = (k + 1)^2$ solutions.

Si K = 4k+1 — Il y a une solution pour laquelle z = k, c'est (0 ; 1 ; k), et trois solutions pour lesquelles z = k-1, ces sont (1 ; 2 ; k-1), (3 ; 1 ; k-1) et (5 ; 0 ; k-1).
Donc encore $(k + 1)^2$ solutions.

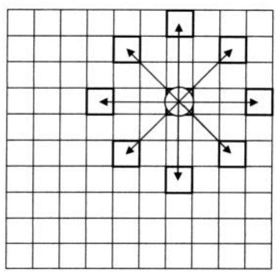
Si K = 4k+2 — Il y a deux solutions pour lesquelles z = k, ce sont (0 ; 1 ; k) et (2 ; 0 ; k), et quatre solutions pour lesquelles z = k-1.
Soit 2 + 4 + 6 + ... + (2k+2) = (k+1)(k+2) solutions.

Si K = 4k+3 — Il y a encore (k+1)(k+2) solutions.

Il ne reste plus qu'à dénombrer, pour chaque solution de $a + 10b + 100t = 200$, le nombre de solutions en (x ; y ; z ; u ; v ; w ; t), ce qui est fait dans le tableau de la page suivante, dont le total donne **104 560** possibilités.

solutions de $a + 10b + 100t = 200$	solutions en (x;y;z;u;v;w;t)	solutions de $a + 10b + 100t = 200$	solutions en (x;y;z;u;v;w;t)
(0 ; 0 ; 2)	1	(50 ; 15 ; 0)	182×20 = 3640
(0 ; 10 ; 1)	12	(60 ; 14 ; 0)	256×20 = 5120
(10 ; 9 ; 1)	9×12 = 108	(70 ; 13 ; 0)	342×16 =5472
(20 ; 8 ; 1)	36×9 = 24	(80 ; 12 ; 0)	441×16 = 7056
(30 ; 7 ; 1)	72×6 = 432	(90 ; 11 ; 0)	552×12 = 6624
(40 ; 6 ; 1)	121×6 = 726	(100 ; 10 ; 0)	676×12 = 8112
(50 ; 5 ; 1)	182×4 = 728	(110 ; 9 ; 0)	812×9 = 7308
(60 ; 4 ; 1)	256×4 = 1024	(120 ; 8 ; 0)	961×9 = 8649
(70 ; 3 ; 1)	342×2 = 684	(130 ; 7 ; 0)	1122×6 = 6732
(80 ; 2 ; 1)	441×2 = 882	(140 ; 6 ; 0)	1296×6 = 7776
(90 ; 1 ; 1)	552	(150 ; 5 ; 0)	1482×4 = 5928
(100 ; 0 ; 1)	676	(160 ; 4 ; 0)	1681×4 = 6724
(0 ; 20 ; 0)	36	(170 ; 3 ; 0)	1892×2 = 3784
(10 ; 19 ; 0)	12×30 = 360	(180 ; 2 ; 0)	2116×2 = 4232
(20 ; 18 ; 0)	36×30 = 1080	(190 ; 1 ; 0)	2352
(30 ; 17 ; 0)	72×25 = 1800	(200 ; 0 ; 0)	2601
(40 ; 16 ; 0)	121×25 = 3025		

PROBLÈME N° 20 proposé par Claude PAGANO



Au zoo de Raon-l'Étape vit l'ami ELTON, un kangourou solitaire enfermé dans un enclos de 10 m sur 10 m pavé par 100 dalle de ciment. Pour tromper son ennui, l'ami Elton saute de case en case :

- soit de 3 m vers le nord, l'est, le sud ou l'ouest,
- soit de 2 √2 m vers le nord-est, le sud-est, le sud-ouest ou le nord-ouest.

Inlassablement, en 100 sauts, il revient à la case départ en ayant piétiné toutes les cases.

Sauriez-vous retrouver un des chemins de l'ami Elton ?