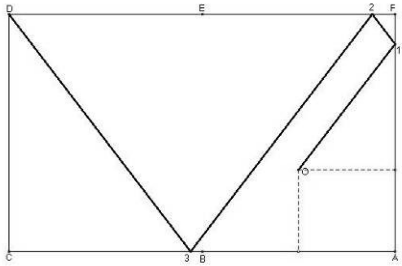
Solution du Problème n°15 (LE BILLARD AMÉRICAIN))

Un billard américain, de forme rectangulaire (le rapport des deux côtés étant 3/2) comporte six trous A, B, C, D, E et F : quatre aux coins, et deux au milieu des grands côtés.

Une boule se situe à l'emplacement situé sur la figure : au ¼ de la longueur et au 1/3 de la largeur par rapport à A.

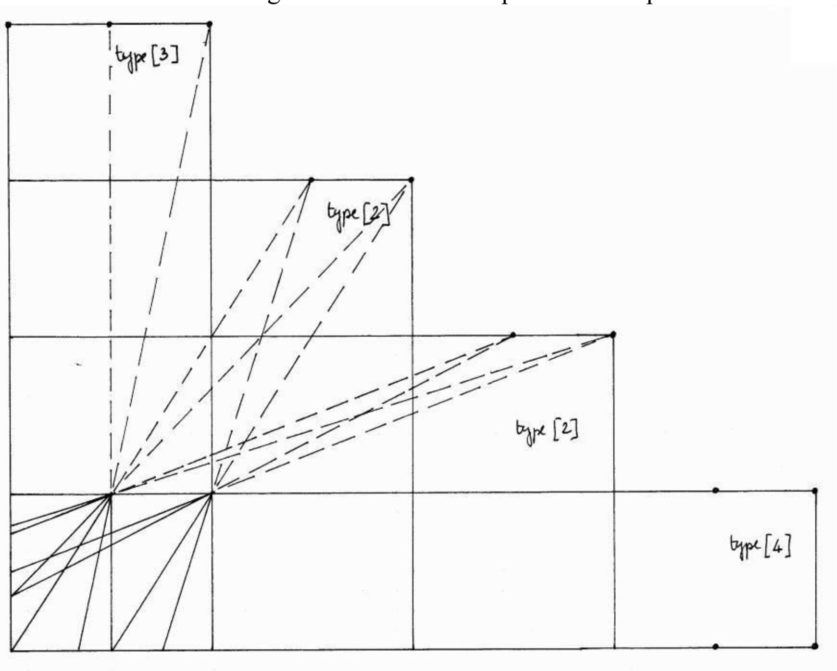
On veut, « en trois bandes », que la boule aille dans un des six trous. Combien y a-t-il de solutions ?

N.B. « En trois bandes » signifie que la boule doit rebondir 3 fois (et seulement trois fois) sur les bords avant d'arriver au trou. Le schéma ci-contre représente une des solutions.

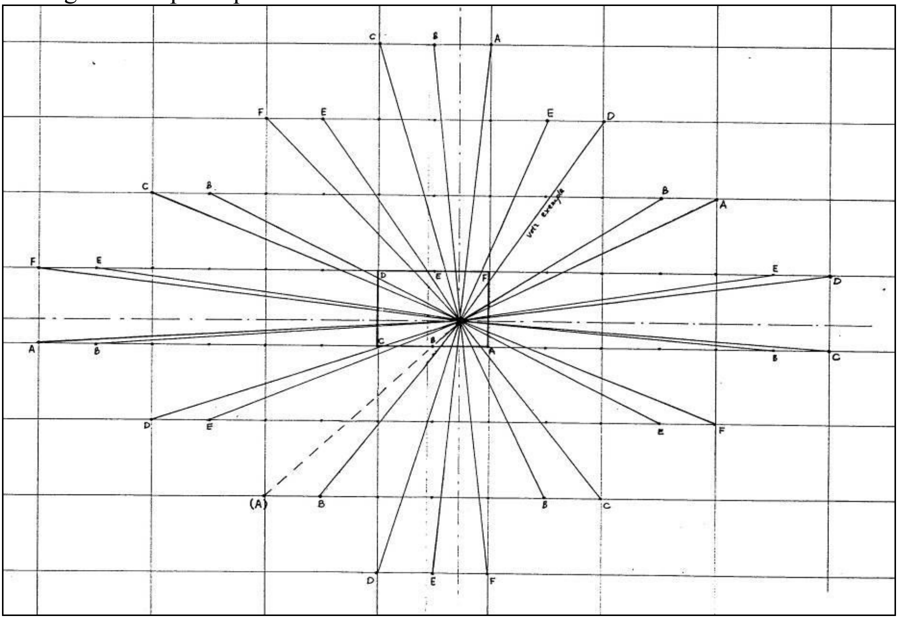


Solution de Robert **AMALBERTI** (VILLENEUVE-LES-AVIGNON), président de l'A.P.M.E.P. et fidèle lecteur de notre bulletin régional.

On utilise la méthode de « l'image virtuelle » chère à nos collègues de physique – méthode dite aussi « du développement » - où l'on considère que les réflexions se font sur des feuillets superposés que l'on déplie après. Ce qui conduit à un des 12 rectangles de la couronne représentée ci après.

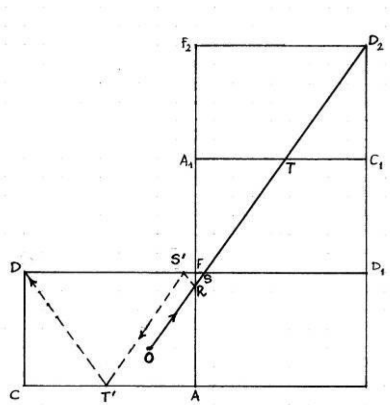


Les rectangles de type [2] sont accessibles de trois façons différentes, et ceux de type [3] ou [4] d'une seule façon.
Il ne reste plus qu'à joindre O à ceux des sommets des rectangles de la couronne qui sont accessibles en traversant successivement trois rectangles adjacents, sans passer par les sommets.
Ce qui donne, sauf pour un ensemble E de mesure nulle du rectangle, fermé pour les droites passant par les sommets, 30 solutions.
On peut supposer (cela reste à vérifier) que le point O a été choisi suffisamment intelligemment pour que ce soit le cas !

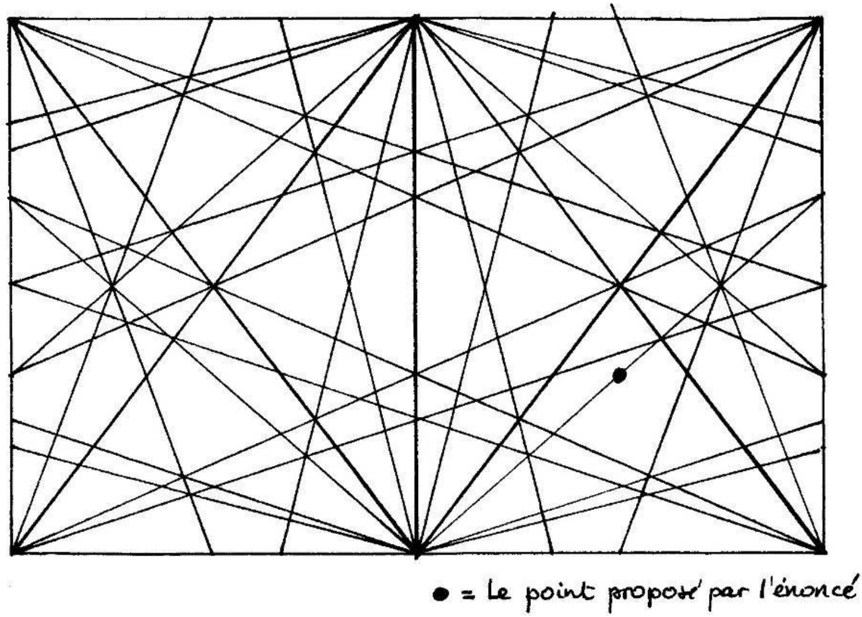


Quelques précisions et remarques d'André VIRICEL, auteur du problème :

La méthode de « l'image virtuelle » consiste à « développer » comme nous le montrons sur cet exemple :
Mais, malheureusement pour Robert Amalberti, j'avais choisi l'énoncé du problème suffisamment astucieusement pour que le point O soit « anormal » : il fait justement partie de cet ensemble E (cette exception est signalée par les pointillés sur la figure ci-contre).
Le problème n'admettait donc **QUE 29 SOLUTIONS** !



A noter également que, dans cet ensemble E de mesure nulle, la plupart des points mènent à 29 solutions, mais que certains mènent à 28, 27, … voire même à 24 solutions seulement (pour deux d'entre eux). Voici la « carte » de E (le point proposé par l'énoncé est signalé en noir) :



On pourra remarquer également que, si on appelle n le nombre de « bandes » nécessaires pour faire sortir la boule, le nombre potentiel de solutions est $N = 8n + 6$. En effet, la « couronne » de rectangles extérieurs contient toujours 2 rectangles de type [3], soit 6 points ; 2 rectangles de type [4], soit 8 points ; $4(n-1)$ rectangles de type [2], soit $8(n-1)$ points.

Nous vous souhaitons maintenant bonne chance pour essayer de sortir en quatre bandes à partir du même point O de l'énoncé !

Problème du trimestre n°16

Soit un triangle ABC dont les angles B et C sont aigus.

On trace le cercle Ω de centre B passant par A, qui coupe la droite (BC) en E et F, et le cercle de centre C passant par A, qui coupe la droite (BC) en G et H. les points E, F, G, H se succèdent dans cet ordre.

1°) Démonter que $EF \times EH \times FG \times FH = 16 \times (aire\ ABC)^2$

2°) En déduire la formule de l'aire du triangle : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.