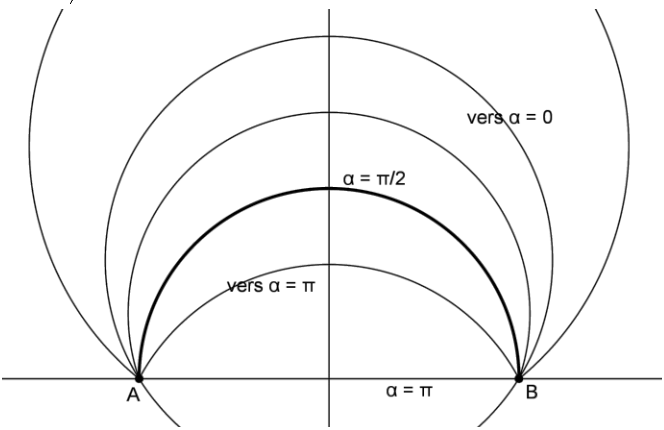
Solution du problème n°13 proposé dans le Petit Vert de mars

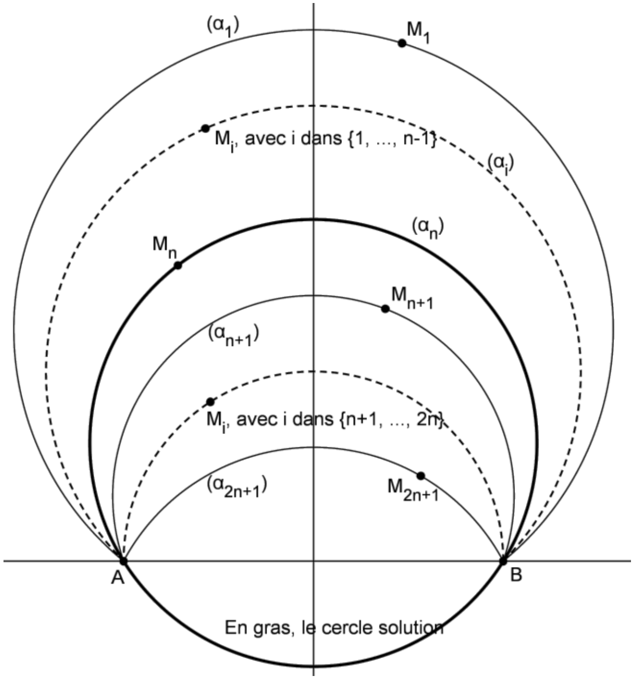
Rappel de l'énoncé : On considère $2n + 3$ points du plan (℘) tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés, et que quatre quelconques d'entre eux ne soient pas cocycliques.
Peut-on trouver un cercle passant par 3 de ces points, et séparant les $2n$ points restants en n points situés à l'intérieur du cercle et n points à l'extérieur ?

Solution de l'auteur, Marc **SERAY**, professeur au lycée Nominé de Sarreguemines, auteur de l'énoncé. Ilnous écrit : voilà une très jolie application de la ligne du programme de TC-TE : « Ensemble des points M vérifiant $\left(MA,MB\right) = \alpha$ modulo π ou 2π ».

On sait que les lignes de niveau de l'application de P\{A,B} sur [0 ; π] : M $\rightarrow \left(MA,MB\right)$ ont l'allure suivante :



Parmi les $2n$+3 points considérés dans ce problème, supposons qu'on puisse en trouver deux (A et B) tels que les $2n$+1 autres soient tous situés dans un même demi-plan limité par (AB) [ce qui peut paraître une « évidence »].
En appelant P ce demi-plan, on peut toujours choisir la notation des points A et b de sorte que, pour tout point de P\{A,B}, (MA, MB) admette une mesure α appartenant à [0 ; π].
Appelons M_1, M_2, …, M_{2n+1} les $2n$+1 points restant, et posons, pour tout i appartenant à {1, 2, …, $2n$+1}, $(M_iA, M_iB) = \alpha_i$, avec $\alpha_i \in [0\ ;\ \pi]$.
On remarquera que les α_i sont tous distincts. En effet : si l'on avait $\alpha_i = \alpha_j$, avec i ≠ j, alors A, B, M_i et M_j seraient alignés ou cocycliques, ce qui est exclu.
On peut alors supposer, quitte à renuméroter les points, que la suite α_i est croissante.
Les points A, B, M_1, M_2 …, M_{2n+1} sont alors disposés de la manière suivante :



Et le cercle (A, B, M_n) répond à la question.

Mais il reste à prouver l'existence (admise comme une évidence au début de la démonstration) des deux points A et B. En fait, il suffirait de considérer l'enveloppe connexe des $2n+3$ points.

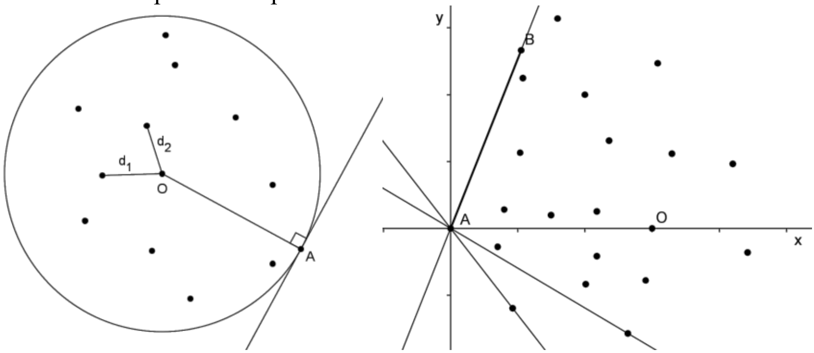
Mais ces considérations n'étant pas accessibles à l'élève de terminale scientifique, on peut les mettre sur la voie de la démonstration plus élémentaire suivante :

- rechercher une droite passant par l'un des points de sorte que les $2n+2$ autres soient situés dans un seul des demi-plans limités par cette droite ;
- faire tourner cette droite jusqu'à ce qu'elle contienne les points A et B répondant à la question.

Recherchons la droite citée.
A partir d'un point O quelconque (parmi les $2n+3$) on peut trouver un point A qui est plus éloigné de O que tous les autres. L'ensemble des $2n+3$ points est donc inclus dans le disque fermé de centre O est dont la frontière passe par A.
La tangente en A à ce cercle frontière est la droite cherchée.

Recherchons maintenant le point B.

Introduisons un repère orthonormé centré en A, dont l’axe des *y* est la tangente précédemment définie, et dont l’axe des *x* est orienté de sorte que l’abscisse de chacun des 2*n*+2 points soit positive.

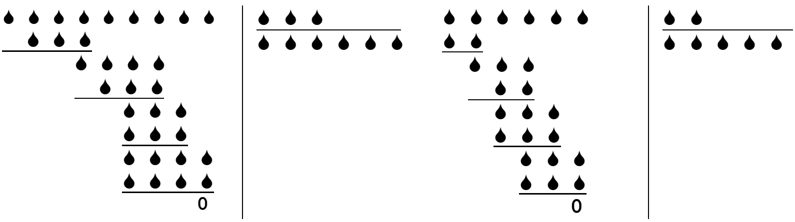


Considérons les droites joignant A à chacun des 2*n*+1 points restant. Parmi ces droites, il en est une dont la pente *m* est maximale. Soit B le point correspondant.

Les points A et B répondent bien à la question, puisque les 2*n*+1 points restant appartiennent tous au demi-plan d’équation $y < mx$, ce qui achève bien la démonstration.

jeu

Rétablir l’énoncé chiffré des deux divisions suivantes, sachant que le quotient de la première est le dividende de la seconde.



Problème n°14

proposé par Jean-Marie **DIDRY**

Soit un polygone d'un nombre impair de côtés et son cercle circonscrit (on pourra, par exemple, prendre un heptagone $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$). On joint un point M du petit arc A_1A_7 aux sept sommets. Démontrer que :
$MA_1 + MA_3 + MA_5 + MA_7 = MA_2 + MA_4 + MA_6$.