Que tous ceux que ces problèmes intéressent prennent contact avec la Régionale : un petit groupe de recherche pourrait se mettre en place, par exemple sur l'analyse des erreurs rencontrées par les élèves dans les situations d'apprentissage.
(contacter directement J. Verdier).

Note de la rédaction en 2008 :

Cet article date d'il y a plus de 20 ans. On peut aussi consulter :

http://www.edunet.tn/maths/Inspect/didac.htm
http://www2.uqtr.ca/hee/site_1/index.php?no_fiche=1629
http://www.inrp.fr/Didactique/Unite/Didmaths

Gilbert ARSAC, *Les Maths en collège et lycée. Didactique des mathématiques et théories de l'apprentissage*, pp. 298-315, Ed. Hachette Éducation Paris, 1997

Jean BRUN, *Didactique des mathématiques*, Ed. Delachaux et Niestlé, Lausanne, 1996.

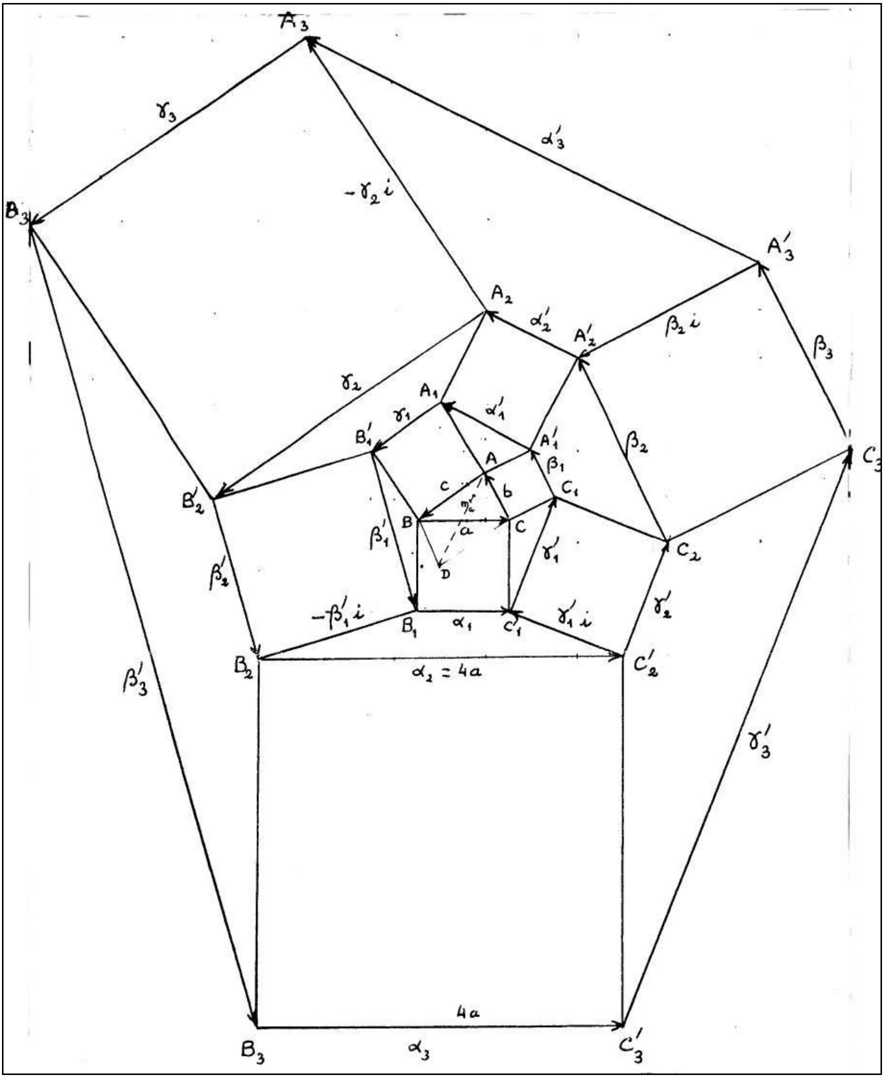
Etc. etc.

Problème du trimestre n°13

proposé par Marc **SERAY DE WOUSTVILLER (57)**

On considère $2n+3$ points du plan ($n \in \mathbf{N}$) tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés, et que quatre quelconques d'entre eux ne soient pas cocycliques.
Peut-on trouver un cercle passant par 3 de ces points, et séparant les $2n$ points restants en n points situés à l'intérieur du cercle et n points à l'extérieur ?
Ce problème est accessible à des élèves de terminale C ou E.

Solution du problème n°12



Rappel de l'énoncé :

Dans un cadre de 18 cm sur 24 cm on place les points A (10 ; 14), B (8,5 ; 13) et C (10,5 ; 13).

N.B. Les dimensions proposées permettent l'obtention d'une figure correcte sur une page de format A4, en prenant comme unité le *cm* et l'origine dans le coin en bas à gauche.

On pose BC = a, CA = b et AB = c.

On construit sur chacun des côtés du triangle ABC, vers l'extérieur, un carré. Les sommets nouveaux sont les sommets d'un hexagone H_1.
Sur les côtés de H_1 qui n'appartiennent pas aux carrés précédents on construit des carrés vers l'extérieur. Les sommets nouveaux sont les sommets d'un hexagone H_2.

Et ainsi de suite…
Exprimer le périmètre de H_k en fonction du périmètre *p* du triangle ABC et de la somme *m* des longueurs de ses médianes.
Exprimer l'aire de H_k en fonction de l'aire *s* du triangle ABC et de la somme *t* des carrés de ses côtés.

Solution de l'auteur, André VIRICEL, DE VILLERS-LES-NANCY (54)

I. Notations

H_1, le premier hexagone, s'appelle $B_1\,C'_1\,C_1\,A'_1\,A_1\,B'_1$
H_k, le k^ème^ hexagone, s'appelle $B_k\,C'_k\,C_k\,A'_k\,A_k\,B'_k$.

a est la longueur BC, *a* le vecteur BC noté aussi α_1 ; de même pour *b* et *c*.

Le côté $B_kC'_k$ de H_k est α_k ; les suivants sont γ'_k, β_k, α'_k, γ_k et β'_k, dans cet ordre.

Les α_k sont parallèles à α_1 ; $\alpha_{2p} = \alpha_{2p-1}$; posons $\alpha_{2p} = u_{2p}\,a$.

Les α'_k sont parallèles à α'_1 ; $\alpha'_{2p-1} = \alpha'_{2p}$; $\alpha'_1 = (b-c)i$; posons $\alpha'_{2p-1} = v_{2p-1}(b-c)i$.

II. Détermination de u_{2p} et v_{2p-1}

1°. La chaîne des vecteurs $B_{2p-1}\,B_{2p}\,C'_{2p}\,C'_{2p-1}\,B_{2p-1}$

donne $-\beta'_{2p-1}i + \alpha_{2p} + \gamma'_{2p-1}i - \alpha_{2p-1} = 0$,

$-v_{2p-1}(c-a)i^2 + u_{2p}a + v_{2p-1}(a-b)i^2 - u_{2p-2}\,a = 0$;

mais $u_{2p-2} = u_{2p-1}$ et $a+b+c=0$,

donc $v_{2p-1}(c+b-a-a) + (u_{2p} - u_{2p-2})a = 0$, et $\boxed{u_{2p} - u_{2p-2} = 3v_{2p-1}}$ (relation $\mathbf{U}_{2p}$).

2°. La chaîne de vecteurs $A_{2p}\,A_{2p+1}\,A'_{2p+1}\,A'_{2p}\,A_{2p}$

donne $-\gamma_{2p}i - \alpha_{2p+1} + \beta_{2p}i + \alpha_{2p} = 0$,

$-u_{2p}ci - v_{2p+1}(b-c)i + u_{2p}bi + v_{2p}(b-c)i = 0$

d'où $\boxed{v_{2p+1} - v_{2p-1} = u_{2p}}$ (relation $\mathbf{V}_{2p+1}$).

3°. Reste à exprimer les u sans les v et les v sans les u.

a) La combinaison symbolique $U_{2p+1} - U_{2p} = 3V_{2p+1}$ conduit à

$(u_{2p+1} - u_{2p}) - (u_{2p} - u_{2p-2}) + 3(v_{2p+1} - v_{2p-1}) = 3(v_{2p+1} - v_{2p-1}) + 3u_{2p}$

donc $u_{2p+2} - 5v_{2p} + u_{2p-2} = 0$.

b) La combinaison symbolique $U_{2p} + V_{2p+1} - V_{2p-1}$ conduit à

$(u_{2p} - u_{2p-2} - 3v_{2p-1}) + (v_{2p+1} - v_{2p-1} - u_{2p}) - (v_{2p-1} - v_{2p-3} - u_{2p-2}) = 0$

donc $v_{2p+1} - 5v_{2p-1} + v_{2p-3} = 0$.

c) Recherche des premiers termes u_1, v_1, u_2, v_2 :

$u_1 = 1$. La chaîne $B_2\, C'_2\, C'_1\, B_1\, B_2$ conduit à $u_2 = 4$ ($\gamma_2 = 4\gamma_1$)

$v_1 = 1$. La chaîne $A_2\, A_3\, A'_3\, A'_2\, A_2$ conduit à $v_2 = 5$ ($\alpha_3 = 5\alpha_2$)

Ainsi $u_{2p+2} - 5u_{2p} + u_{2p-2} = 0$ avec « u_0 » = 1, $u_2 = 4$ (**U'**)

et $v_{2p+1} - 5v_{2p-1} + v_{2p-3} = 0$ avec $v_1 = 1$ et $v_3 = 5$ (**V'**).

On peut ainsi :

* Soit calculer de proche en proche

rang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
u	**1**		**4**		**19**		**91**		**436**		**…**
v		**1**		**5**		**24**		**115**		**551**	

* Soit appliquer l'une des méthodes classiques de résolution des équations (**U'**) et (**V'**).

Tous calculs fait, on trouverait

$$u_{2p} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{21}}\right)\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^p + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{\sqrt{21}}\right)\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^p,$$ et une

formule de même allure pour les v_{2p+1}.

III. Périmètre des hexagones

Dans le parallélogramme ABDC, le vecteur $(c-b)$ a pour module le double de la médiane m_a issue de A, donc $\alpha_{2p+1} = v_{2p-1} \times 2m_a$.

Or $\alpha_{2p-1} = \alpha_{2p-2} = u_{2p-2} \times a$, donc :

$\mathscr{P}(H_{2p-1}) = u_{2p-2}(a+b+c) + 2v_{2p-1}(m_a + m_b + m_c)$,

$\mathscr{P}(H_{2p-1}) = u_{2p-2} \times P + 2v_{2p-1} \times M$.

De même $\mathscr{P}(H_{2p}) = u_{2p} \times P + 2v_{2p-1} \times M$ et

$\mathscr{P}(H_{2p+1}) = u_{2p} \times P + 2v_{2p+1} \times M$.

Il y a une sorte «d'escalade» : un des deux termes ne change pas, l'indice de l'autre augmente de 2.

IV. Aires des hexagones

L'hexagone H_1 comporte trois carrés et trois triangles équivalents à ABC (d'aire S) :

Aire(H_1) = $a^2 + b^2 + c^2 + 3S$.

On l'entoure successivement « couronnes » formées de trois carrés et de trois trapèzes.

Côtés des hexagones

1°) α_0, α_1 α_2, α_3 ...... $\alpha_{2k}, \alpha_{2k+1}$

$u_0 \times a$ $u_2 \times a$ ...... $u_{2k} \times a$

2°) Dans le parallélogramme ABCD, le vecteur $(c-b)$ a pour module le double de la longueur de la médiane m_a issue de A.

α'_1, α'_2 α'_3, α'_4 ...... $\alpha'_{2k-1}, \alpha'_{2k}$

$v_1 \times 2m_a$ $v_3 \times 2m_a$ ...... $v_{2k-1} \times 2m_a$

Périmètre des hexagones (voir § **III**)

Il comprend les trois côtés des carrés qu'il contient et les trois grandes bases des trapèzes.

$\mathscr{P}(H_{2k-1}) = \sum \alpha_{2k-1} + \sum \alpha'_{2k-1}$

$\mathscr{P}(H_{2k}) = \sum \alpha'_{2k} + \sum \alpha_{2k}$

Donc $\mathscr{P}(H_{2k-1}) = u_{2k-2}\,P + 2v_{2k-1}\,M$
$\mathscr{P}(H_{2k}) = u_{2k}\,P + 2v_{2k-1}\,M$
$\mathscr{P}(H_{2k+1}) = u_{2k}\,P + 2v_{2k+1}\,M$

<u>Aire des hexagones</u>

L'aire des hexagones comprend le triangle ABC qu'on retrouvera ultérieurement, la somme des carrés des côtés α_1, α_3, …, α'_1, α'_3…, la sommes des trapèzes classés en deux catégories (ceux dont les grandes bases ont des indices impairs, et ceux dont les grandes bases ont des indices pairs).

Il y a deux cas.

- Hexagones d'indices impairs

Somme des carrés de côtés α_1, α_3, …, α_{2k-1} : $\sum_{p=1}^{p=k} u_{2p-2}^2 \times \sum a^2$

(posons $\sum a^2 = T$)

Somme des carrés de côtés α'_1, α'_3, …, α'_{2k-1} : $\sum_{p=1}^{p=k} v_{2p-1}^2 \times \sum (2m_a)^2$

avec ($4\sum m_a^2 = 3T$)

Somme des trapèzes dont les grandes bases ont des indices impairs :

En accolant les premiers en commençant par les plus petits, on obtient le triangle $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1$ (qui a pour côtés les doubles des médianes, son aire est 3S), puis les trapèzes de bases α'_3, β'_3, γ'_3 on obtient en tout le triangle $\alpha'_3\beta'_3\gamma'_3$, puis … les trapèzes de bases α'_{2k-1}, β'_{2k-1}, γ'_{2k-1} , on obtient en tout le triangle $\alpha'_{2k-1}\beta'_{2k-1}\gamma'_{2k-1}$, ce dernier semblable à $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1$, le rapport de similitude étant v_{2k-1}, donc l'aire totale des trapèzes accolés est $v_{2k-1}^2 \times 3S$.

Somme des trapèzes dont les grandes bases ont des indices pairs :

Autour du « noyau » ABC qu'on utilise ici, les trois premiers trapèzes accolés donnent le triangle $\alpha_2\beta_2\gamma_2$. Les trois trapèzes suivants mènent à $\alpha_4\beta_4\gamma_4$, … et enfin on obtient le triangle $\alpha_{2k-2}\beta_{2k-2}\gamma_{2k-2}$. Ce dernier est semblable à ABC, le rapport de similitude étant u_{2k-2}, donc l'aire totale de ces nouveaux trapèzes est $u_{2k-2}^2 \times S$.

L'aire de H_{2k-1} est $\sum_{p=1}^{p=k} u_{2p-2}^2 \times T + \sum_{p=1}^{p=k} v_{2p-1}^2 \times 3T + v_{2k-1}^2 \times 3S + u_{2k-2}^2 \times S$,

ou $\left(\sum_{p=1}^{p=k} u_{2p-2}^2 + 3 \sum_{p=1}^{p=k} v_{2p-1}^2 \right) \times T + \left(3v_{2k-1}^2 + u_{2k-2}^2 \right) \times S$.

- Hexagones d'indices pairs

On montrerait d'une manière analogue que l'aire de H_{2k} est :

$$\left(\sum_{p=1}^{p=k} u_{2p}^2 + 3 \sum_{p=1}^{p=k} v_{2p-1}^2 \right) \times T + \left(3v_{2k-1}^2 + u_{2k}^2 \right) \times S.$$

Dans chacun des coefficients de T ou de S, on reconnaît la montée en alternance quand on passe d'un hexagone au suivant.