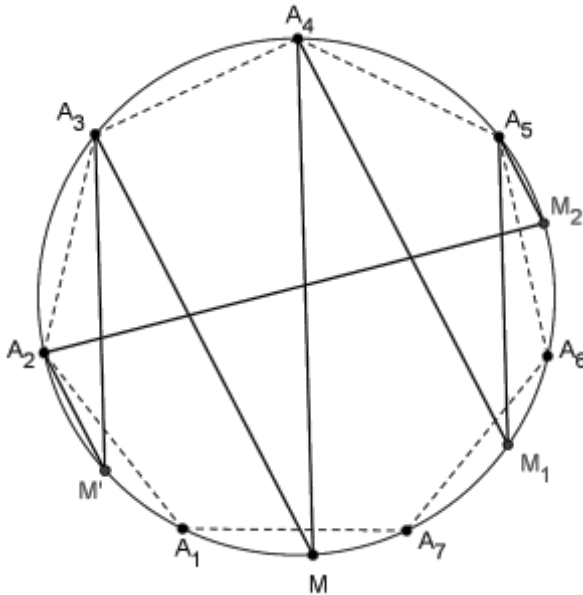


Première solution



La droite A_2M_2
détermine avec ce
contour six triangles

Il est rappelé que le côté de l'heptagone régulier est « presque » égal à la moitié du côté du triangle équilatéral inscrit dans le même cercle.

Deuxième solution

La solution est présentée ici pour un pentagone régulier :

On trace le cercle (M) de centre M et tangent au cercle donné de diamètre MP . Soit Q le symétrique de P par rapport à M . On trace le cercle (N) de diamètre MQ .

Prolongeons MA_1 , MA_3 et MA_5 jusqu'en B_1 , B_3 et B_5 sur le cercle (M). Prolongeons A_2M et A_4M jusqu'en A'_2 et A'_4 sur le cercle (N).

Les vecteurs

$\overrightarrow{MB_1}, \overrightarrow{MB_2}, \dots, \overrightarrow{MB_5}$

forment une étoile polygonale régulière ; leur somme est donc nulle.

La somme algébrique de leurs projections $\overrightarrow{MC_1}, \overrightarrow{MC_2}, \dots, \overrightarrow{MC_5}$ sur l'axe QP est nulle. La somme des valeurs absolues des termes positifs (comme MQ) est donc égale à la somme des valeurs absolues des termes négatifs (comme MC_2) :

$$MC_1 + MC_3 + MC_5 = MC_2 + MC_4$$

Comparons les triangles MA_iP (ou MA'_iQ) et MC_iB_i :

Ils sont rectangles en A_i (ou A'_i) et C_i . Leurs hypoténuses sont égales et ils ont un angle aigu commun. Ils sont donc égaux, et $MA_i = MC_i$.

Le remplacement des MC_i par les MA_i dans l'égalité écrite ci-dessus conduit au résultat proposé.

Troisième solution

On peut se ramener (pour le pentagone par exemple) à :

$$\cos(\alpha) + \cos(\alpha - \frac{2\pi}{5}) + \cos(\alpha - \frac{4\pi}{5}) = \cos(\alpha - \frac{\pi}{5}) + \cos(\alpha - \frac{3\pi}{5})$$

