ANALYSE NON-STANDARD

TEMPÊTE DANS NOS CERVEAUX

Les mathématiciens paraissent d'accord pour conclure qu'il n'y a guère qu'une concordance superficielle entre nos connaissances "intuitives" de la notion d'ensemble et d'entier et les formalismes qui sont supposés en rendre compte ; le désaccord commence lorsqu'il est question de choisir entre les unes et les autres.

Niolas BOURBAKI ,
Éléments d'Histoire des Mathématiques, 1960.

Comment se fait-il que les nombres réels infinitésimaux (plus petits que toute quantité positive que l'on puisse imaginer), ou infiniment grands, aient été et soient encore « interdits d'analyse » depuis des décennies ?

C'est ce qu'a expliqué Georges REEB, de Strasbourg, à la vingtaine de participants au Séminaire de rentrée de la Régionale, le 5 septembre dernier à GÉRARDMER.

Est-ce que ça peut avoir un sens de parler, dans $\mathbf{N}$ par exemple (¹), d'entiers "infiniment grands" ?

Georges REEB appelle "naïfs" les entiers 0, 1, 2 ... avec lesquels il nous paraît tout "naturel" de travailler, entiers qui seraient tous plus petits que les entiers "infiniment grands". Pour pouvoir manipuler rigoureusement - selon les règles bourbakistes, par exemple ces nombres, il en propose une définition :

0 est naïf

si $n \in \mathbf{N}$ est naïf, alors son suivant $n+1$ est naïf.

Il a alors semblé évident aux participants que, d'après le principe de récurrence, tout élément de $\mathbf{N}$ devait être naïf et que $\mathbb{R}$ par conséquent - il n'y avait pas lieu de parler d'entiers infiniment grands.

C'était bien mal connaître le principe de récurrence ainsi défini chez Bourbaki :

¹ L'ensemble $\mathbf{N}$ est parfaitement défini dans Bourbaki donc on sait (en principe) ce que c'est.

Soit E une partie de $\mathbf{N}^{(2)}$;
 supposons que : $0 \in E$
 et que : si $n \in E$ alors $n+1 \in E$,
 alors $E = \mathbf{N}$.

Tout ce que l'on peut conclure à ce moment-là, c'est que **SI** la notion d'entier infiniment grand a un sens, alors les entiers "naïfs" **NE FORMENT PAS UN ENSEMBLE !**

Le fait de supposer qu'il existe dans $\mathbf{N}$ des entiers "non-naïfs" **NE PEUT DONC PAS AMENER A UNE CONTRADICTION.**

On peut donc, sans danger pour la rigueur et la logique mathématiques, supposer qu'il existe dans $\mathbf{N}$ un élément non-naïf (ou encore "infiniment grand") ω .

On en tire alors toutes sortes de conséquences, qui pourront apparaître comme des évidences, mais qu'il est facile de démontrer :

1) $\omega+1, 2\omega, \omega^2, \omega-1, \omega^\omega, \text{Ent}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ etc. sont infiniment grands.

2) Si n est naïf, alors $n < \omega$.

3) Beaucoup plus difficile à "imaginer" (ou à se représenter) qu'à prouver : l'ensemble $[0 \dots \omega]$ des entiers compris entre 0 et ω est un ensemble FINI (au sens bourbakiste), mais dont le cardinal $(\omega+1)$ est un entier infiniment grand...

C'est sur cette proposition que G. REEB et les membres de la Régionale se sont quittés, celui-là ayant créé quelques remous dans les cerveaux de ceux-ci.

Auparavant, nous avons fait une brève incursion - beaucoup plus reposante intellectuellement - dans $\mathbb{R}$:

On y appelle "infiniment grand" tout élément α tel que il existe $\omega \in \mathbf{N}$, ω infiniment grand et $\alpha > \omega$

On appelle "infiniment petit" ou "infinitésimal" tout élément ε de $\mathbf{R}$ tel que son inverse soit infiniment grand.

Les autres réels seront les réels "naïfs", ou limités, ou "standard".

On obtient alors tout une série d'écritures qui prennent un SENS, et qui sont excessivement "pratiques" (écritures que l'on traque dans les copies de nos élèves ...).

² C'est à dire que E est un ensemble. Il doit donc vérifier les critères très stricts définis par Bourbaki qui permettent de dire que "quelque chose" est un ensemble.

Par exemple : si ω est un réel infiniment grand, alors $\frac{\ln \omega}{\omega}$ est un infinitésimal.

Ou encore : si ε est un infinitésimal, alors $1 - \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}$ est un infinitésimal.

Ou encore : si ε est un infinitésimal, alors $\frac{\sin(x + \varepsilon) - \sin x}{\varepsilon} = \cos x + \eta$ où η est un infinitésimal.

(Remarque : dans toutes ces écritures, ε est un réel FIXE, et non pas "quelque chose qui tend vers", et c'est bien là l'intérêt).

Nous aurons au moins retenu de cette demi-journée que la méthode (dite "standard") avec les ε et les η , sur laquelle se fonde toute notre conception de l'analyse, n'est qu'UNE des méthodes possibles, et que les mathématiciens ont fait un choix (qui se justifie, certes, mais qui n'est qu'un choix).

POUR EN SAVOIR UN PEU PLUS :

★ Georges REEB, ANALYSE NON STANDARD (Essai de vulgarisation), in Bulletin A.P.M.E.P. n° 328, avril 1981, pages 259-273.

Cet article est suivi d'une bibliographie commentée.

(Pour ceux qui ne disposent plus de ce bulletin, nous pouvons leur photocopier l'article et le leur expédier, contre 4 timbres à 2,20 F).

★ Christine CHARRETTON, "NON STANDARD : Calcul infinitésimal et analyse non-standard" in "DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES : LE DIRE ET LE FAIRE", Editions CEDIC/NATHAN, 1987, pages 249-256.

ANNONCES

ANNONCE N°1 :

Un professeur grec est intéressé par des spécimens de cinquième (nouveaux programmes).

Si vous en avez en double, envoyez-les (³) de la part de la Régionale Lorraine directement à :

Evangelos EFSTATHOPOULOS
11 rue Filafelfeos
11253 ATHENES (Grèce)

ANNONCE N°2 :

Oui peut me dire comment réaliser simplement, sur une imprimante DMP, une copie d'écran quand on est en LOGO sur APPLE IIe ?

Envoyer la réponse à J. VERDIER, 22 rue Victor Hugo, 54130 ST-MAX

³ Au tarif postal "LIVRES". 6,60 F pour 500 g, 11,00 F pour 1 kg