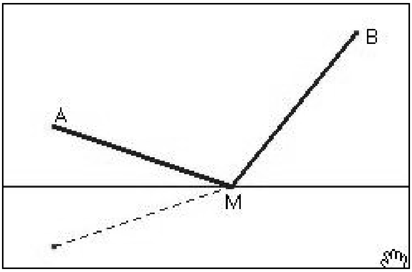
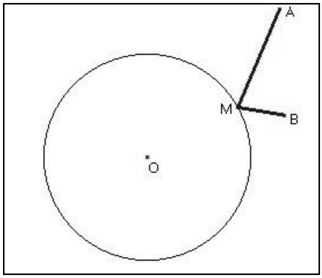
PROBLÈMES

Enoncé n°11.1

Tout le monde connaît l'exercice suivant : déterminer M sur la droite (*D*) tel que MA + MB soit minimum (voir 1ère figure) : ce problème se résout à l'aide d'une symétrie.

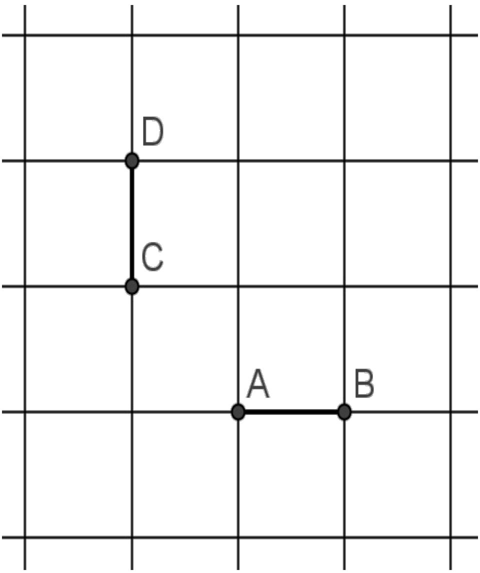




Mais que se passe-t-il si, au lieu d'une droite (*D*), on a un cercle (*C*) ?

Etant donné un cercle (*C*) et deux points A et B extérieurs à ce cercle, déterminer M sur (*C*) tel que MA + MB soit minimum.

Enoncé n°11.2



Problème proposé par A. Viricel, qui faisait faire ce problème en classe de TC au cours d'une heure dire « d'études dirigées » et d'une heure dite de « travaux manuels ».

Dans un quadrillage à mailles carrées, on met en évidence les deux segments AB et CD (en gras sur la figure).

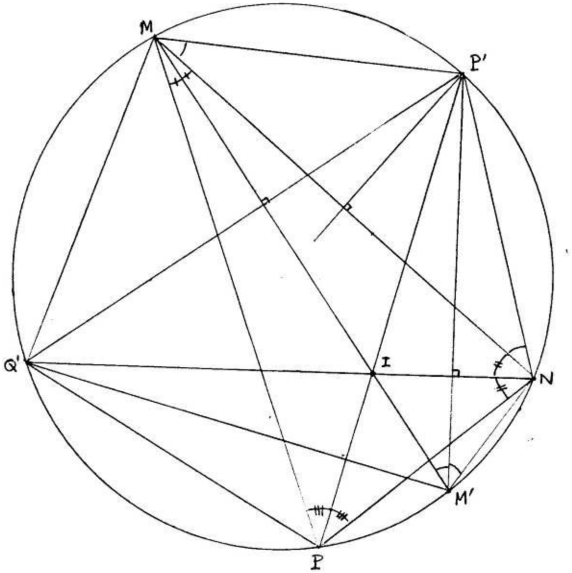
Quel est l'ensemble des points dont le rapport des distances aux deux segments AB et CD est égal à 2 ?

Solution du problème n°10 (PETIT VERT de juin)

Rappel de l'énoncé (proposé par Clade MORLET) : Avec quatre points M, N, P et Q d'un cercle, on peut former quatre triangles MNP, NPQ, PQM et QMN. Montrer que I, J, K et L, centres des cercles inscrits dans ces quatre triangles, sont les sommets d'un rectangle.

Solution proposée Marc SERAY, du lycée technique Sarreguemines.

Dans un premier temps, montrons que R, S, T et U, milieux respectifs des petits arcs MN, NP, PQ et QM sont aussi les centres des cercles circonscrits aux paires de triangles respectifs MNJ et MNI, PNI et PNL, PQL et PQK, MQK et MQJ.
Pour cela, remarquons les fait suivant : si MNP est un triangle inscrit dans le cercle (C) et si I désigne le centre de son cercle circonscrit, alors les bissectrices intérieures de ce triangle, MI, NI et PI, recoupent (C) en M', N' et P', respectivement cercles des cercles circonscrits aux triangles PNI, PMI et NMI (voir figure suivante).

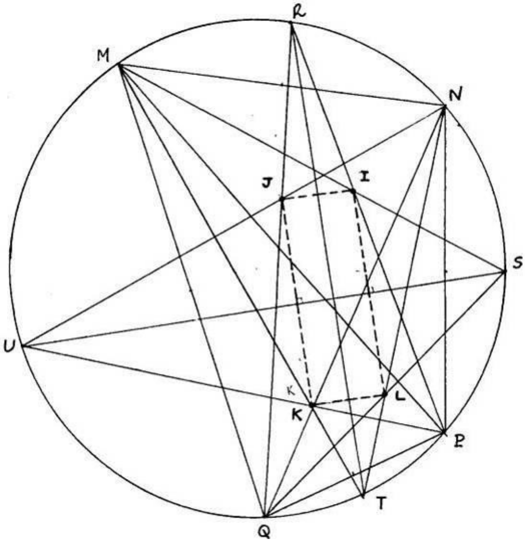


En effet, *PMM'* = *M'MN*. Ces angles inscrits dans le cercle (C) étant égaux, ils s'appuient sur des arcs de longueurs égales arc(PM') et arc(M'N). Or les angles inscrits *PP'M'* et *NP'M'*, s'appuyant sur ces mêmes arcs, sont donc égaux. On en déduit que les droites P'I et P'N sont symétriques par rapport à P'M'. On peut démontrer d'une manière analogue que les droites M'I et M'N sont symétriques par rapport à P'M'. On en déduit que N et I sont symétriques par rapport à P'M', et en particulier que les longueurs P'I et P'N sont égales.

Il est clair d'autre part que P'M = P'N puisque les angles inscrits *MPP'* et *P'PN* sont égaux.

A ce stade, on a bien démontré que P' est le centre du cercle circonscrit à MIN. On procède de la même manière pour montrer que M' et N' sont bien les centres des cercles circonscrits annoncés ; finalement, les points R, S, T et U vérifient bien les propriétés signalées.

On peut même remarquer les alignements suivants : RJQ, RIP, SIM, SLQ, TLN, TKM, UJN et UKP (figure 2).



Dans une deuxième partie, montrons que RT et US sont axes de symétrie pour le quadrilatère IJKL.

En effet, les angles inscrits *SUN* et *SUP* interceptent des arcs de longueurs égales SN et SP ; ils sont donc égaux. On en déduit que US est la bissectrice issue de U du triangle JUK.

Or le cercle de centre U passant par M et Q passe aussi par J et K. JLK est donc isocèle en U, et J et K sont symétriques par rapport à US.

On peut montrer de la même manière que I et L sont symétriques par rapport à US, puis que I et J d'une part, U et L d'autre part, sont symétriques par rapport à RT.

Ici, nous sommes presque au bout, puisque IJKL est un quadrilatère ayant deux axes de symétrie distincts : il s'agit nécessairement d'un rectangle ou d'un losange.

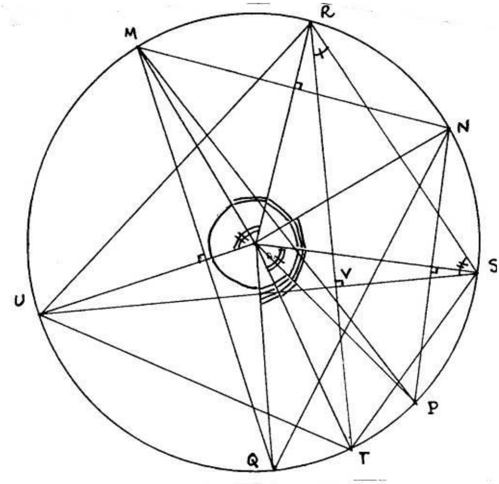
Dans un dernier temps, montrons plus élémentairement que RT et US sont orthogonales.

Pour cela, montrons que les angles *TRS* et *RSU* sont complémentaires.

TOS et *TRS* sont un angle au centre et un angle inscrit interceptant le même arc TS. On en déduit que $TRS = \frac{1}{2}\, TOS$ et que $RSU = \frac{1}{2}\, ROU$.

On peut remarquer que (voir figure page suivante) $TOS = \frac{1}{2}(PON + POQ)$ et $ROU = \frac{1}{2}(MON + MOQ)$.

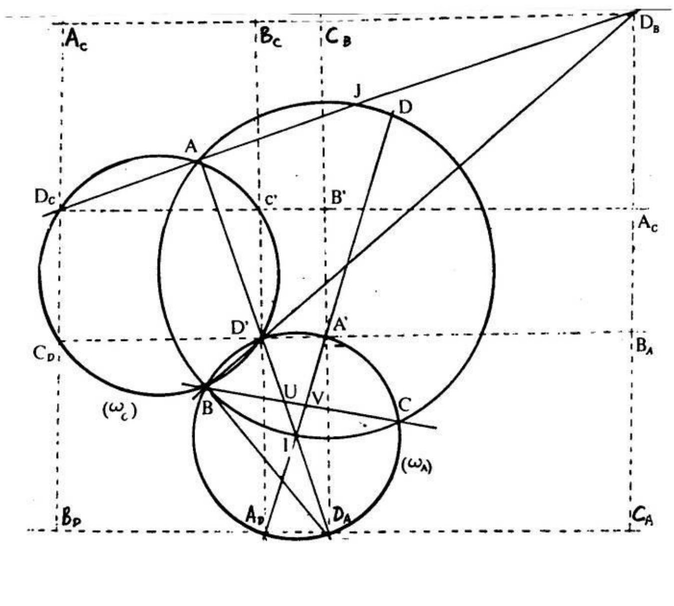
Donc $TRS + RSU = \frac{1}{4}(PON + POQ + QOM + MON) = \frac{1}{4} \times 360° = 90°$. Le triangle RVS est bien rectangle en V et les droites RT et US sont bien orthogonales.



Finalement, IJKL est un quadrilatère possédant deux paires de côtés parallèles, IJ et KL qui sont orthogonaux à RT, et IL et JK qui sont orthogonaux à US. Autrement dit, IJ, KL et US sont parallèles, ainsi que IL, JK et RT. Or US et RT sont orthogonaux ; on en conclut donc que IJKL est un parallélogramme avec (au moins) un angle droit : c'est un rectangle.

C.Q.F.D.

Par ailleurs, nous publions ci-contre une très belle figure due à André VIRICEL, de VILLERS-LES-NANCY, déjà parue dans le n° 336 du bulletin de l'A.P.M.E.P. (1982) : au lieu des quatre centres des cercles inscrits, A. VIRICEL a placé les centres des cercles tritangents aux côtés des triangles (donc 16 au total) qui sont, quatre à quatre, sur deux familles de droites, ce qui donne 36 rectangles au lieu d'un seul !



Solution du problème n°9 (PETIT VERT de juin)

Rappel de l'énoncé : f est une fonction monotone décroissante (à partir d'une certaine valeur de x), et $\lim_{\infty} f = 0$.

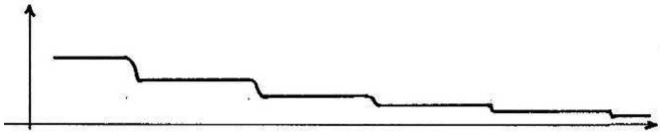
Peut-on en déduire que $\lim_{\infty} f' = 0$?

Solution de l'auteur, J. VERDIER, inspirée d'un exercice de Jean-Louis OVAERT et Jean-Luc VERLAY.

La proposition est fausse.

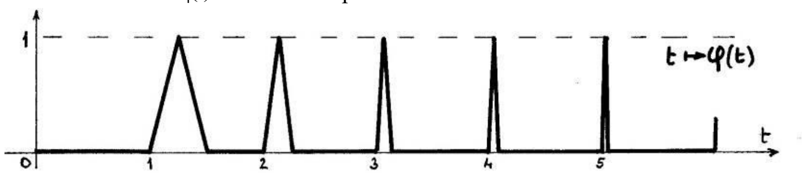
① L'idée, pour le prouver, est la suivante : trouver une fonction dérivable décroissante qui, « de temps en temps », décroisse très rapidement, et qui soit « suffisamment » peu décroissante par ailleurs pour que $\lim_{\infty} f = 0$.

Une fonction de ce « style » conviendrait très bien :



② Construction d'une telle fonction

Soit la fonction $t \mapsto \varphi(t)$ définie et représentée ci-dessous :



La base du n^ème^ triangle a pour valeur $\frac{1}{2^n}$ et son sommet a pour coordonnées $\left(x_n = n + \frac{1}{2^{n+1}} ; y_n = 1\right)$. La série des aires des triangles $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$ est convergente.

Prenons $f(x) = \int_x^{\infty} \varphi(t)\, dt$

f est bien décroissante sur [1 ; ⑥[, on a bien $\lim_{\infty} f = 0$ et $f'(x) = -\varphi(x)$ d'où $\lim_{\infty} f'(x) \neq 0$.

On a donc « exhibé » un contre-exemple.

③ Si on exige en outre que f soit **strictement** décroissante et de classe C^{∞}, il ne reste plus, à partir de l'exemple ci-dessus, qu'à « arrondir les angles », en pratiquant par exemple une convolution.

Solution du problème n°10 (PETIT VERT de juin)

Rappel de l'énoncé (problème proposé par Michel Bonn, suite au problème n°9)

Il est évident que $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\infty} f = 0 \\ \lim\limits_{\infty} f' = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\infty}(f + f') = 0$. La réciproque est-elle vraie ?

Solution de Bruno **LOVAT**.

Cette réciproque est vraie.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit t_0 tel que : $\begin{cases} t > t_0 \Rightarrow |f(t) + f'(t)| < \varepsilon \\ f \textit{ dérivable sur } [t_0 ; +\infty[\end{cases}$

On va majorer $|f(x)|$.

1. Idée : on pose $g(x) = e^x.f(x)$, d'où $g'(x) = e^x(f(x) + f'(x))$. On fait ainsi apparaître $f + f'$.

2. On intègre : $\int_{t_0}^{x} e^t(f(t) + f'(t))\,dt = g(x) - g(t_0)$

ce qui donne : $g(x) = g(t_0) + \int_{t_0}^{x} e^t(f(t) + f'(t))\,dt$

3. On revient à $f(x) = e^{-x}.g(x)$: $f(x) = e^{-x}.g(t_0) + e^{-x}\int_{t_0}^{x} e^t(f(t) + f'(t))\,dt$.

Or $|f(t) + f'(t)| < \varepsilon$ dès que $t > t_0$.

D'où $|f(x)| \le e^{-x}|g(t_0)| + e^x\varepsilon(e^{-x} - e^{t_0}) = e^{-x}|g(t_0)| + \varepsilon(1 - e^{t_0 - x})$, pour $x \ge t_0$, où la dernière parenthèse $(1 - e^{t_0 - x})$ est strictement inférieure à 1.

4. On fait tendre x vers l'infini : $e^{-x}|g(t_0)|$ a pour limite 0. On peut donc rendre $|f(x)| < 2\varepsilon$.

C.Q.F.D.

Remarque de Michel ***BONN****, auteur de la question :*

Je proposais cet exercice à mes étudiants comme application des équations différentielles linéaires : la démonstration que j'en donnais consistait à résoudre l'équation différentielle linéaire $f(x) + f'(x) = 1 + \varepsilon(x)$ où $\lim\limits_{\infty} \varepsilon(x) = 0$.

Or la méthode dite « de variation de la constante » revient exactement à la solution proposée ci-dessus par Bruno LOVAT.