L'ESPRIT ET LA LETTRE

Il y a deux façons de changer les programmes. La première consiste à affirmer bien haut (suffisamment haut pour que les béotiens soient convaincus) que tout ce qu'on enseignait est démodé, sans intérêt, et qu'il faut (enfin !) montrer aux élèves les fondements de la vraie science. La seconde part de la constatation que l'enseignement donné est inefficace, que la formation donnée ne permet pas, en fin de scolarité, la résolution des problèmes les plus élémentaires rencontrés en physique, en économie... On affirme alors qu'il faut – quoi qu'on puisse en dire au nom de la science – revenir à des problèmes plus concrets.

Vous avez reconnu dans cette description d'une part l'attitude hystérique des novateurs de 70, d'autre part le glissement qui a débuté en 76 (avec les programmes Haby de sixième) et qui continue en 87 (avec les programmes Chevènement de sixième,...). La première méthode a un avantage : elle fait table rase de ce qui existait ; donc elle ne provoque pas un alourdissement des programmes. La seconde méthode a pour conséquence, d'une part qu'on va rechercher dans les textes les plus anciens « ce qui peut avoir du bon » (c'est ainsi qu'on ressuscite l'ortho entre), d'autre part qu'on n'oublie pas complètement les programmes immédiatement antérieurs (en particulier on garde leur jargon), et enfin qu'au nom de la modernité, on ajoute beaucoup de choses. C'est ainsi que l'on a fabriqué les actuels manuels de seconde. Fort heureusement les élèves ont rapidement mis un terme à cette tentative de gavage. Mais il est resté, chez la plupart des professeurs, une impression de malaise : personne n'est certain de traiter le programme ; chacun a l'impression que pour respecter à la lettre les textes officiels il faudrait disposer d'un horaire deux ou trois fois plus important.

Le postulat qui servit de base à la réforme de 70 est à peu près celui-ci : il existe en mathématiques quelques types de raisonnements, quelques types d'objets, que l'on peut mettre en évidence à beaucoup d'endroits ; il est naturel de les enseigner d'abord. Quand ceci sera bien assimilé, il ne restera plus qu'à l'appliquer aux diverses situations que l'on rencontrera dans des problèmes de mathématiques, ou en dehors des mathématiques. C'est ainsi qu'en classe de cinquième on enseigna les relations d'équivalence à tout le monde, aux futurs pharmaciens (pour qu'ils rangent mieux les flacons sur les étagères) comme aux *futurs coiffeurs. Très vite le ridicule de la situation devint évident ; des morceaux d'anthologie comme « la droite affine » ou la « définition des réels » en quatrième, y aidèrent beaucoup.*

Les différentes réformes, allégements... des programmes depuis dix ans vont toutes dans le même sens : oublions tout ce qui n'est pas utile, pour nous consacrer à ce dont l'élève a réellement besoin. Evidemment, au niveau du collège, on a supprimé (ou fortement allégé) les développements de théorie des ensembles. Mais dès les premières pages des manuels de seconde on parle de l'équipollence comme d'une « relation d'équivalence », on introduit le barycentre en disant que « l'application vectorielle de Leibniz est bijective », etc. Autrement dit ce qu'on a supprimé au niveau n, est supposé connu au niveau n + 1 ou n + 2. C'est ramener des questions difficiles (elles étaient mal connues des élèves de seconde qui les avaient étudiées trois ou quatre mois par année de collège), au statut de « mots de vocabulaire dont chacun est supposé connaître le sens ». C'est grotesque.

Les notions ensemblistes ont été abordées au collège (attention ceci va disparaître avec les nouveaux programmes : rentrée 90), aucune étude approfondie n'en a été faite, certaines d'entre elles ont été totalement ignorées (injectivité, surjectivité). Il est donc totalement absurde de penser éclairer une définition ou une démonstration en les employant. Bien au contraire on risque ainsi de compliquer la situation en employant des mots dont l'élève a oublié le sens, ou même qu'il n'a jamais vus. Faut-il pour autant en bannir l'emploi ? Probablement pas. On peut de temps à autre les utiliser pour résumer un résultat, pour dire « dans un vocabulaire savant » ce que l'on vient de comprendre. Et ceci dans les domaines les plus divers, pour illustrer au mieux leurs différents emplois.

Mais cette attitude de réserve devrait s'appliquer à bien d'autres domaines : les notions de projection, de vecteur ne sont pas des outils fiables à l'entrée en seconde. Une longue étude des vecteurs va être nécessaire pour que les meilleurs élèves puissent (en première S, première E...) les considérer comme un outil familier. Ce qui signifie en particulier qu'il me paraît exclu de parler de barycentre en début d'année.

Il me semble que pour concevoir l'enseignement d'une partie du programme, il convient (en priorité) de se demander comment celle-ci s'insère *dans les connaissances que l'élève est sensé acquérir dans les années à venir. Ceci réserve souvent des surprises, et permet de comprendre que bien des activités, bien des calculs jugés comme classiques et largement pratiqués n'ont aucun sens. Voici quelques exemples.*

La valeur absolue

Les programmes demandent de traiter de la valeur absolue. Alors on représente graphiquement la fonction $x \to |x|$ *; c'est idiot (je sais que les programmes demandent de le faire) car on ne fait rien de ce graphique. On étudie* $x \to |x - 2| + |x - 2|$ *pour le plaisir d'étudier un problème où il y a plusieurs cas de figure ; mais il est plaisant de constater que l'on a introduit les mesures algébriques en géométrie pour éviter les cas de figure, et que l'on profite d'une singularité du langage algébrique pour en étudier quelques-uns. C'est idiot. Si on veut un graphique formé de bouts de droites, il est plus simple de faire manœuvrer un train entre Nancy et Strasbourg. La valeur absolue en tant que fonction ne sert à rien. Elle n'est qu'une façon savante de parler de l'écart (ou de la distance) entre deux nombres. Elle est souvent utilisée en analyse mais uniquement au travers des formules :*

$$|x - a| \leq \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|ab| \leq |a| \times |b|$$

Le champ idéal d'étude de la valeur absolue d'incertitudes. Vous me répliquerez que le mot incertitude ne figure pas dans le programme ; pourtant le titre 1 demande que l'on fasse quelques calculs d'approximations, et chacun sait qu'une approximation n'a de sens que si elle est accompagnée d'un calcul d'incertitude.

Voici des questions qui pourraient donner lieu à exercices :

$$|x - 1{,}310| \leq 0{,}001 \text{ et } |y - 2{,}171| \leq 0{,}0005$$

Que peut-on dire de x + y ? de y - x ? de xy ? de x/y ?

Vous remarquerez que n'étant pas sadique, je ne joue pas simultanément avec les nombres négatifs, les inégalités et les produits (ou pire : les quotients). Mais on peut aussi encadrer cos x, puisque cos est décroissante sur $[0 , \pi/2]$ *; tiens, on retrouve une belle occasion d'employer une notion qui figure au programme.*

Les équations de droites.

Elles existent sous deux formes : l'équation réduite y = ax + b (qui s'écrit quelquefois x = c), c'est-à-dire la représentation graphique d'une fonction affine ; ou bien l'équation générale ux + vy - w. Si l'on remarque que pour 80% des élèves les droites n'apparaîtront en terminale que comme des tangentes à une courbe y = f (x) , on préférera la première forme.
Mais on peut se demander pourquoi on a inventé les « ux + vy = w ». Tout bêtement parce que certaines droites ne s'écrivent pas « y = ax + b » ; l'usage systématique des équations réduites nous obligera donc à considérer des cas particuliers dans les problèmes de géométrie analytique : chaque fois qu'une droite deviendra parallèle à Oy, il faudra traiter le cas à part. Encore faut-il remarquer qu'il y a deux sortes de problèmes de géométrie analytique, ceux dont les données sont toutes des nombres fixés, et ceux dont les données comportent des paramètres, ou des points mobiles. Seuls les seconds peuvent donner lieu à des discussions de cas particuliers. Mais on n'ose pas tes traiter en seconde (car trop compliqués), ni même en première S. C'est l'exemple typique de la complication venue d'un autre temps et d'un autre niveau (les classes de taupe des années 50). C'est idiot.

Donc les équations de droites sont d'abord les « y = ax + b » ; et pour trouver l'équation d'une droite je chercherai d'abord sa pente (appelez-la coefficient directeur si vous voulez). Il est pourtant impossible d'oublier les « ux + vy = w », car on doit traiter des systèmes d'équations à deux inconnues. Mais on entre là dans un autre domaine, celui des problèmes linéaires (car résoudre des systèmes pour mécaniser la méthode ne sert pas à grand-chose à ce niveau), que l'on peut résoudre graphiquement.

Ainsi les objectifs de l'étude des équations de droites en seconde n'ont rien à voir avec la géométrie analytique. En particulier les vecteurs directeurs et autres méthodes qui cachent la notion de pente, n'ont rien à y faire. Notons que les nouveaux programmes de collège tiennent compte de ces remarques ; malheureusement en seconde on prétend toujours faire de la géométrie analytique. C'est idiot.

Les vecteurs

Dans la conception constructiviste des mathématiques (qui est le fondement philosophique des programmes de 70), l'essentiel est que les objets que l'on manipule soient non pas définis, mais construits à partir de la théorie des *ensembles. C'est ainsi que, pour décrire des objets aussi simples que les vecteurs, on fit de longs développements sur les propriétés des parallélogrammes aplatis. Cette construction n'a aucun intérêt, elle n'est là que pour éviter de parler de ce que tout le monde peut voir : un vecteur c'est la donnée d'une direction orientée, et d'une longueur.*

L'origine du mot vecteur est (bien sûr) mécanique. C'est une notion qui a été introduite pour décrire les vitesses et les forces. Ce qui est tout à fait extraordinaire, c'est qu'on peut en faire un outil pour effectuer rapidement certains calculs de géométrie analytique. Tous les problèmes d'alignement, et, grâce au produit scalaire, tout ce qui concerne les distances et les angles, se traduisent vectoriellement ; et les vecteurs se révèlent plus faciles à manipuler que les couples de coordonnées.

J'ai peut-être résumé là l'essentiel du programme de géométrie de seconde : puisqu'un vecteur est la donnée d'une direction orientée et d'une longueur, on va pouvoir le repérer de deux façons.

- *d'une part en donnant sa longueur et sa direction orientée ; et c'est pour repérer celle-ci que je serai obligé de dire de combien j'ai tourné (par rapport à la direction origine) et dans quel sens. C'est la raison d'être des angles orientés, qui ne sont donc que des objets d'une grande banalité.*
- *d'autre part en donnant ses coordonnées dans des axes orthonormés.*

Et pour passer de l'un à l'autre de ces repérages, on va inventer le cos et le sin. Le produit scalaire apparaîtra, après coup comme un moyen de calculer l'angle de deux vecteurs.

On voit qu'il existe pour tout cela une problématique toute naturelle, dans laquelle l'élève va pouvoir dessiner, mesurer et calculer sur son dessin ; il va pouvoir poser et résoudre des problèmes qui sont à ses yeux de vrais problèmes, et non aller d'interdit (dont il ne connaît pas l'origine) en notation (qu'il ne comprend pas). Et comme par hasard tout ceci ressemble à ce qu'il devra connaître pour maîtriser les nombres complexes en terminale.

Quelques remarques : c'est depuis le début des années 70 qu'on n'ose plus parler du sens d'un vecteur ou d'un angle. Bien sûr il faut laisser les élèves constater le sens sur la figure. On pourrait aussi le calculer, mais ceci n'a d'intérêt que lorsqu'on ne peut le voir ; par exemple lorsque les vecteurs ou les angles sont trop petits ; ou lorsque la figure est mobile ou déformable. Les *considérations métaphysiques sur la distinction entre l'angle et ses mesures datent de la même époque. Par contre c'est dès le début du siècle que l'on s'est demandé si les angles étaient une grandeur mesurable, et que l'on a décidé de mesurer plutôt les arcs (ce qui, avec les élèves actuels qui maîtrisent mal la proportionnalité, est fort dangereux). Vous avez probablement noté le ridicule de la situation : les auteurs de manuels ont introduit la notion d'arc orienté (le mot figurait dans les textes officiels) ; mais les définitions qu'ils en ont donné sont totalement différentes.*

Vous avez j'espère noté que si je dis que (Ox , Oz) c'est l'angle dont il faut faire tourner Ox pour l'amener sur Oz, c'est que je considère que la notion de rotation est antérieure à la notion d'angle. Il s'agit bien sûr de la rotation matérielle : je tourne d'un quart de tour dans le sens direct (et je me retrouve dans la même position que si j'avais tourné de deux tours et quart dans le sens direct).

Le barycentre.

C'est une technique géométrique qui permet de démontrer quelques propriétés géométriques ; elle est d'invention assez récente. Pourquoi en parler en seconde ? Beaucoup de collègues croient qu'elle est absolument nécessaire au physicien (en seconde). C'est faux. Le calcul des centres d'inertie n'est pas au programme ; ce n'est qu'une mauvaise habitude, que d'ailleurs les dernières instructions (fin 85 ou début 86) essayent de gommer. Ceci ne justifie pas qu'on fasse une longue théorie à un futur élève de terminale B.

Mais les barycentres ne sont que la forme vectorielle (à 2, 3, ... dimensions) de la notion de moyenne pondérée étudiée en statistiques (les formules $m = \frac{1}{\sum a_i}\left(\sum a_i x_i\right)$ *et* $OG = \frac{1}{\sum a_i}\left(\sum a_i Oa_i\right)$ *sont identiques). Autrement dit la théorie du barycentre est liée au fait que la moyenne des températures des jours du mois d'avril, est indépendante de l'échelle de températures (centigrades ou Fahrenheit) que j'utilise pour /aies les calculs ; je trouve des nombres différents mais ces nombres représentent la même température moyenne. Evidemment, dans ce type de problèmes, les barycentres à coefficients négatifs perdent une partie de leur signification.*

En guise de conclusion :

L'enseignement des mathématiques est en crise. Les programmes mal ficelés et les manuels encyclopédiques ont joué un rôle important dans le malaise qui règne depuis quelques années. Mais on ne modifiera la situation que par une réflexion sérieuse sur la matière enseignée. Il ne sert à rien de discuter sur les limites des programmes, sur les connaissances exigibles à tel ou tel niveau. Par contre on pourrait se demander quelles sont les grandes notions que l'élève doit comprendre (et non apprendre). Celles-ci doivent être abordées d'un point de vue d'utilisateur (faut-il rappeler que moins de 1% des élèves de seconde deviendront professeurs de mathématiques), en abandonnant toute référence à l'élégance des méthodes (aucun calcul n'est plus élégant qu'un autre, il peut seulement se révéler plus commode dans certains cas, pour celui qui sait s'en servir), aux interdits ancestraux (qui ont été inventés pour des élèves dont l'âge, les compétences, et les besoins étaient différents), et à l'orthodoxie du langage (je me demande si la grande nouveauté des programmes de lycée des années 80 n'est pas le remplacement de l'abréviation Log par ln !!).

Mais revenons à la question qui vous intéresse ; peut-on, par une telle analyse, proposer une progression plus à la portée des élèves ? Oui dans la mesure où on a éliminé bon nombre de séquences où Von perd son temps. Oui dans la mesure où l'on peut ainsi persuader l'élève que faire des mathématiques c'est d'abord faire preuve de bon sens. Mais il faut rester modeste, ne pas alourdir l'ensemble par des techniques trop poussées. Ce ne sont que des élèves de quinze ou seize ans. Je voudrais d'ailleurs proposer une expérience à ceux d'entre vous qui ont plus de quarante ans : recherchez les manuels qui faisaient la joie (?) de votre adolescence, et constatez comme ils étaient modestes.

C. MORLET