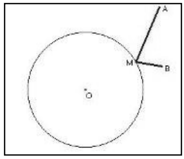
Problème n°12 proposé par André VIRICEL

Dans un cadre de 18 cm sur 24 cm on place les points A (10 ; 14), B (8,5 ; 13) et C (10,5 ; 13).
N.B. Les dimensions proposées permettent l'obtention d'une figure correcte sur une page de format A4, en prenant comme unité le *cm* et l'origine dans le coin en bas à gauche.
On pose BC = a, CA = b et AB = c.
On construit sur chacun des côtés du triangle ABC, vers l'extérieur, un carré. Les sommets nouveaux sont les sommets d'un hexagone H_1.
Sur les côtés de H_1 qui n'appartiennent pas aux carrés précédents on construit des carrés vers l'extérieur. Les sommets nouveaux sont les sommets d'un hexagone H_2.
Et ainsi de suite…

Exprimer le périmètre de H_k en fonction du périmètre p du triangle ABC et de la somme m des longueurs de ses médianes.
Exprimer l'aire de H_k en fonction de l'aire s du triangle ABC et de la somme t des carrés de ses côtés.

Solution du problème n°11.1 (septembre 1987)

Rappel de l’énoncé : Etant donné un cercle (C) et deux points A et B extérieurs à ce cercle, déterminer M sur (C) tel que MA + MB soit minimum.



Remarque préalable. On aurait pu choisir les deux points à l’intérieur du cercle : c’est le célèbre problème du « billard circulaire » d’Al Hazan (où la balle doit-elle se réfléchir pour aller de A à B ?).

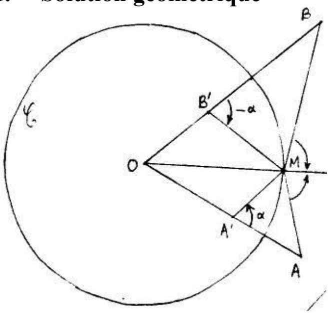
Première partie de la solution :

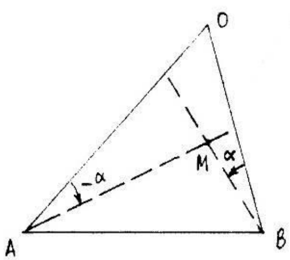
Le point M doit être tel que OM soit la bissectrice de l’angle (MA,MB). En effet : soit $f(M) = MA + MB$. Les lignes de niveau correspondantes sont les ellipses *(E)* de foyers A et B (dont l’ellipse réduite au seul segment [AB]). Le minimum de MA + MB est atteint lorsque l’ellipse est tangente au cercle *(C)* (le maximum est atteint dans des conditions analogues).
Un des propriétés de l’ellipse est que la tangente en M est bissectrice (extérieure) des deux rayons MA et MB.

Le problème se ramène donc à ceci : quel est le point M du cercle tel que OM soit bissectrice de (MA,MB) ?

Seconde partie de la solution :

1. Solution géométrique





Soit l’inversion $\Im(0\,;\,r^2)$, laissant *(C)* invariant, A’ le transformé de A et B’ le transformé de B.
Les triangles OMA et OA’M sont semblables ; de même OMB et OB’M. D’où
(OA’,A’M) = (OM,OA) [mod π] et
(OB’,B’M) = (OM,OB) [mod π]. On reconnaît là un mode de génération d’une hyperbole équilatère.

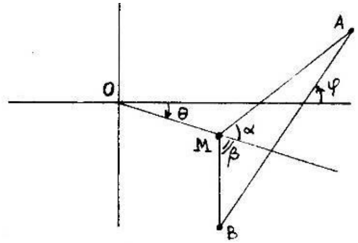
Eléments géométriques de cette hyperbole :

- Si $\alpha = 0$, M est en O
- Si $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, M est en S, diamétralement opposé à O dans le cercle OA’B’.
- Si α = (OA’,A’B’), M est en B’.
- Si α = (OA’,OB’), M est le quatrième sommet m du parallélogramme B’OA’m ; il en résulte que le centre ω de l’hyperbole est le milieu de [A’B’].
- Si $\alpha = \dfrac{(OA',OB')}{2}$ $\left[\text{mod } \dfrac{\pi}{2}\right]$, M est à l’infini.

Les asymptotes sont donc les parallèles menées par ω aux bissectrices de (OA,OB).

Le point M recherché est une des intersections de cette hyperbole et du cercle *(C)* (celle qui est à l’intérieur de l’angle saillant *AOB*.

2. Solution trigonométrique



On cherche θ tels que les angles α et β soient égaux (voir figure ci-dessus).On a :

$$OM\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix},\ MA\begin{pmatrix}x-\cos\theta\\ y-\sin\theta\end{pmatrix},$$

$$ME\begin{pmatrix}x'-\cos\theta\\ y'-\sin\theta\end{pmatrix}.$$

Appelons L la distance AB, et φ l'angle (Ox,BA) :

$$L^2=(x-x')^2+(y-y')^2 \text{ et } \tan\varphi=\frac{y-y'}{x-x'}.$$

$$\tan\alpha=\frac{OM.MA}{\text{dét}(OM,MA)}=\frac{(x-\cos\theta)\cos\theta+(y-\sin\theta)\sin\theta}{(x-\cos\theta)\sin\theta-(y-\sin\theta)\cos\theta}=\frac{x\cos\theta+y\sin\theta-1}{x\sin\theta-y\cos\theta}$$

De même $\tan\beta=\dfrac{x'\cos\theta+y'\sin\theta-1}{x'\sin\theta-y'\cos\theta}$.

Il faut que α = β, d'où :

$$(x\cos\theta+y\sin\theta-1)(x'\sin\theta-y'\cos\theta)=(x'\cos\theta+y'\sin\theta-1)(x\sin\theta-y\cos\theta),$$

ce qui équivaut à : $(x-x')\sin\theta+(y-y')\cos\theta+(x'y-xy')=0$.

Par conséquent, en divisant par L^2 et en utilisant φ, il vient $\cos(\theta-\varphi)=\dfrac{x'y-xy'}{L^2}$,

dont la solution est $\theta=\varphi+\text{Arccos}\dfrac{x'y-xy'}{L^2}$.

3. Solution par les nombres complexes

Prenons comme origine le centre O de *(C)*, et comme unité le rayon.

Les affixes sont pour M : $e^{i\theta}$, pour A : $z=a.e^{i\alpha}$ et pour B : $z'=b.e^{i\beta}$. Le vecteur AM correspond à $e^{i\theta}-ae^{i\alpha}$ et BM à $e^{i\theta}-be^{i\beta}$.

Exprimons le fait que AM et BM font des angles opposés avec OM :

$$\frac{e^{i\theta}-ae^{i\alpha}}{e^{i\theta}}\times\frac{1}{AM} \text{ et } \frac{e^{i\theta}-be^{i\beta}}{e^{i\theta}}\times\frac{1}{BM} \text{ sont inverses,}$$

soit $(e^{i\theta}-ae^{i\alpha})(e^{i\theta}-be^{i\beta})=e^{2i\theta}AM.BM$.

Appliquons le même calcul aux vecteurs symétriques par rapport à Ox :

$$(e^{-i\theta}-ae^{-i\alpha})(e^{-i\theta}-be^{-i\beta})=e^{-2i\theta}AM.BM$$

Divisons membre à membre les deux égalités précédentes :

$$\frac{e^{2i\theta}-e^{i\theta}(ae^{i\alpha}+be^{i\beta})+abe^{i(\alpha+\beta)}}{e^{-2i\theta}-e^{-i\theta}(ae^{-i\alpha}+be^{-i\beta})+abe^{-i(\alpha+\beta)}}=4e^{i\theta}.$$

Soit $e^{4i\theta}abe^{-i(\alpha+\beta)}-e^{3i\theta}(ae^{-i\alpha}+be^{-i\beta})+e^{2i\theta}=e^{2i\theta}-e^{i\theta}(ae^{i\alpha}+be^{i\beta})+abe^{i(\alpha+\beta)}$,

ou encore $e^{4i\theta}\overline{z}\overline{z'}-e^{3i\theta}(\overline{z}+\overline{z'})+e^{i\theta}(z+z')-zz'=0$.

En divisant par $e^{2i\theta}$, on obtient

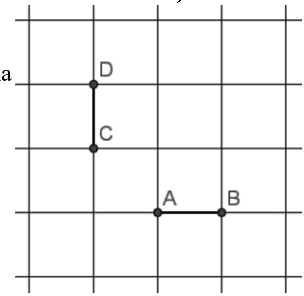
$$ab(e^{i(2\theta-\alpha-\beta)}-e^{-i(2\theta-\alpha-\beta)})-a(e^{i(\theta-\alpha)}-e^{-i(\theta-\alpha)})-b(e^{i(\theta-\beta)}-e^{-i(\theta-\beta)})=0.$$

En divisant par 2i, il vient :
$ab\sin(2\theta-\alpha-\beta)-a\sin(\theta-\alpha)-b\sin(\theta-\beta)=0$,

soit l'équation $\boxed{\sin(2\theta-\alpha-\beta)=\frac{1}{a}\sin(\theta-\alpha)+\frac{1}{b}\sin(\theta-\beta)}$, que l'on peut résoudre graphiquement dès que l'on connaît a, α, b et β.

Solution du problème n°11.2 (septembre 1987)

Dans un quadrillage à mailles carrées, on met en évidence les deux segments AB et CD (en gras sur la figure).
Quel est l'ensemble des points dont le rapport des distances aux deux segments AB et CD est égal à 2 ?

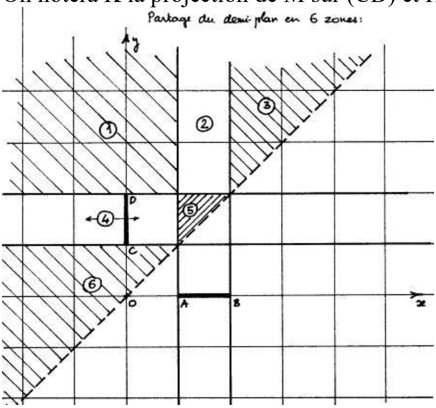


Solution de l'auteur, A. **VIRICEL**.

Choisissons des axes *Ox* et *Oy* qui contiennent respectivement les segments [AB] et [CD], l'unité étant celle du quadrillage. Il est évident qu'il n'y a aucun point solution dans le demi-plan y < x.

La distance d'un point M(*x,y*) à un segment est la plus courte des distances de M à l'ensemble des points du segment. On est donc amené à partager le demi-plan $y > x$ en six zones ; si on note K la projection de M sur (CD) et H sa projection sur (AB), la solution du problème correspond à ceci :

On notera K la projection de M sur (CD) et H la projection de M sur (AB).



zone 1: $\frac{MA}{MD}=2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}}=2$

zone 2 : $\frac{MH}{MD}=2 \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}}=2$

zone 3: $\frac{MB}{MD}=2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}}=2$

zone 4 : $\frac{MA}{MK}=2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{|x|}=2$

zone 5 : $\frac{MH}{MK}=2 \Leftrightarrow \frac{y}{x}=2$

zone 6 : $\frac{MA}{MC}=2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=2$

La solution du problème est donc la courbe ci-après, dont les 5 arcs se raccordent « correctement » (c"est à dire avec tangente commune) :