

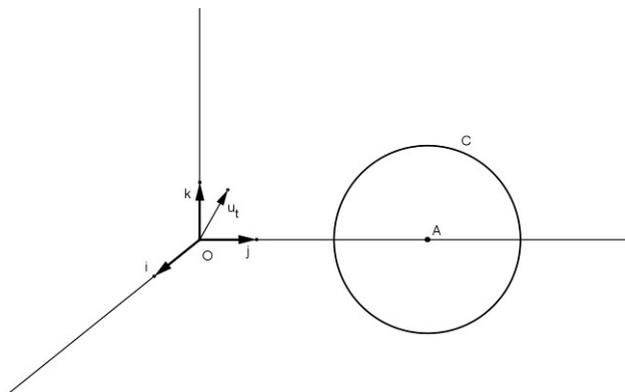
TORE PARTAGÉ

Par Jean-Marie DIDRY
professeur au lycée Frédéric Chopin, Nancy

Il est toujours surprenant d'apprendre qu'outre ses méridiens et ses parallèles, le tore contient une troisième famille de cercles, mise en évidence par Antoine Yvon VILLARCEAU en 1848 : les sections de cette surface par les plans qui lui sont bitangents.

Pour bien "voir" ces cercles, il suffit de faire pivoter un plan autour d'un axe de symétrie du tore (distinct de l'axe de révolution) et d'observer les sections correspondantes : les deux cercles de VILLARCEAU obtenus lorsque le plan est bitangent au tore apparaissent alors comme réunion de deux croissants, limites d'une suite de courbes que l'on se propose d'étudier.

Le problème sera abordé de façon analytique en choisissant un repère orthonormé (O, i, j, k) de l'espace tel que (O, k) soit l'axe de révolution du tore T , et (O, i) l'axe de symétrie regardé, autour duquel pivotent tous les plans Π_θ du type (O, i, u_θ) avec $u_\theta = \cos\theta \cdot j + \sin\theta \cdot k$.



T est engendré par la rotation autour de (O, k) d'un cercle C du plan (O, j, k) de centre $A(0, a, 0)$ et de rayon r (avec $0 < r < a$) :

$M(x, y, z)$ est sur T si et seulement si $m(0, \sqrt{x^2 + y^2}, z)$ est sur C , d'où l'équation de T dans

le repère (O, i, j, k) :

$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2$, soit $x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2}$, ou encore, les deux membres de l'égalité étant positifs (car $a > r$) : $(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$.

Pour déterminer l'intersection $T \cap \Pi_\theta$ dans le repère (O, i, u_θ) , il faut connaître celle de T dans le repère $(O, i, u_\theta, i \wedge u_\theta)$.

On a $i \wedge u_0 = \cos\theta k - \sin\theta j$; la formule de changement de repère est donc :

$$\begin{cases} x = X \\ y = Y \cos\theta - Z \sin\theta \\ z = Y \sin\theta + Z \cos\theta \end{cases}$$

D'où l'équation de T dans le nouveau repère :

$$(X^2 + Y^2 + Z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2 (X^2 + (Y \cos\theta - Z \sin\theta)^2)$$

Et celle de $T \cap \Pi_0$ dans le repère (O, i, u_0) :

$$(X^2 + Y^2 + Z^2 + a^2 - r^2)^2 - 4a^2 (X^2 + Y^2 \cos^2\theta) = 0.$$

Décidons de représenter dans un même repère orthonormé du plan (O, e_1, e_2) toutes les courbes Γ_θ d'équation $(X^2 + Y^2 + Z^2 + a^2 - r^2)^2 - 4a^2 (X^2 + Y^2 \cos^2\theta) = 0$.

Puisque $\Gamma_{-\theta} = \Gamma_\theta$, il suffit de prendre θ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Γ_0 et $\Gamma_{\pi/2}$ se déterminent sans calcul :

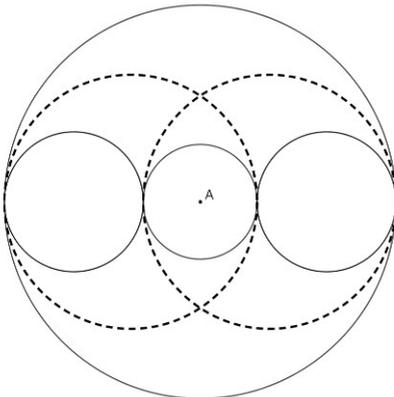
Γ_0 est la réunion des deux cercles de centre O et de rayons respectifs $a - r$ et $a + r$;

$\Gamma_{\pi/2}$ est la réunion des deux cercles de rayon r et de centres respectifs $I(-a, 0)$ et $I'(a, 0)$.

Lorsque la demi-droite (O, u_θ) est tangente à C, c'est-à-dire pour

$\theta = \theta_0 = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a}\right)$, Π_{θ_0} est bitangent à T, Γ_{θ_0} est encore la réunion de deux cercles.

En effet, Γ_{θ_0} a pour équation $(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 - 4a^2 \left(x^2 + y^2 \frac{a^2 - r^2}{a^2}\right) = 0$, qui peut se mettre sous la forme $((x - r)^2 + y^2 - a^2)((x + r)^2 + y^2 - a^2) = 0$.



Il s'agit des cercles de VILLAR-CEAU, de rayon a , centrés respectivement en J $(r, 0)$ et J' $(r, 0)$.

La figure suivant rassemble Γ_0 , Γ_{θ_0} et $\Gamma_{\pi/2}$ (respectivement en rouge, pointillés noirs, bleu) :

Pour θ quelconque, il est clair que Γ_θ est symétrique par rapport à (O, e_1) et par rapport à (O, e_2) ; il

suffit de connaître la partie γ_θ de Γ_θ située dans le premier quadrant.

Pour obtenir un paramétrage de γ_θ pour $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on peut mener par O une demi-droite

définie par $(e_1, OM) = \theta$; elle coupe le cercle de centre O et de rayon ρ en un point au plus.

En effet, le système
$$\begin{cases} x \geq 0 ; y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = \rho^2 \\ (x^2 + y^2 + a^2 - r^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2 \cos^2 \theta) = 0 \end{cases}$$

équivalent à
$$\begin{cases} x \geq 0 ; y \geq 0 \\ x^2 = \rho^2 - y^2 \\ y^2 = \frac{1}{4a^2 \sin^2 \theta} (\rho^2 - (a-r)^2) ((a+r)^2 - \rho^2) \end{cases}$$

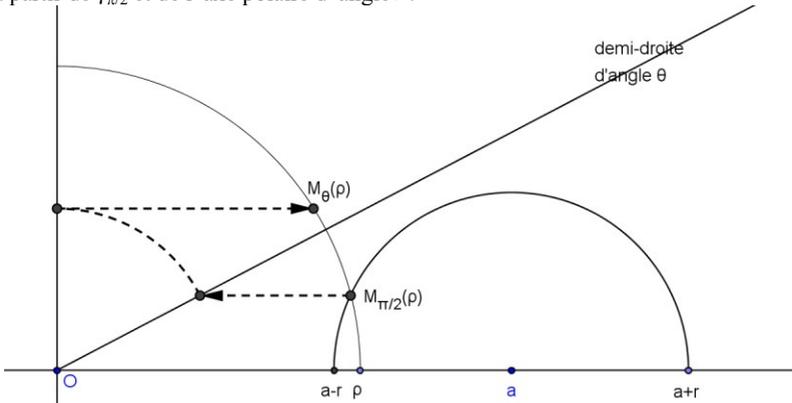
qui définit une fonction de ρ dans ρ^2 :

$$\rho \rightarrow \begin{cases} x_\theta(\rho) = \frac{1}{2a \sin \theta} \sqrt{(\rho^2 + a^2 - r^2)^2 - (2a\rho \cos \theta)^2} \\ y_\theta(\rho) = \frac{1}{2a \sin \theta} \sqrt{(\rho^2 - (a-r)^2) - ((a+r)^2 - \rho^2)} \end{cases}$$

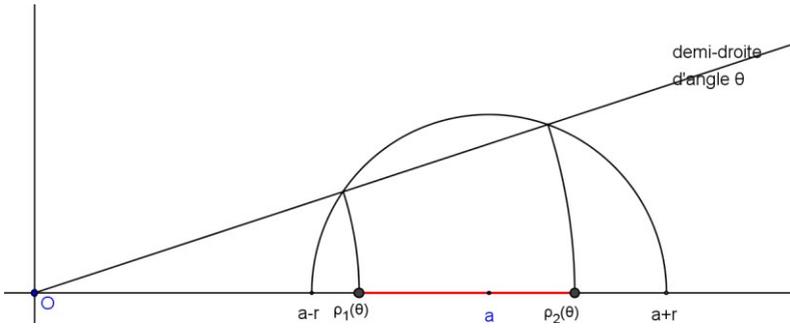
dont le domaine de définition $D_\rho(\theta)$ est inclus dans l'intervalle $[a-r; a+r]$.

En remarquant que $y_\theta(\rho) = \frac{1}{\sin \theta} \times y_{\frac{\pi}{2}}(\rho)$, on obtient une construction point par point de

γ_θ à partir de $\gamma_{\pi/2}$ et de l'axe polaire d'angle θ :



Cette construction a de plus l'avantage de permettre la visualisation de $D_\rho(\theta)$: il est clair que $\Gamma_\theta(\rho)$ existe pour tout point de $[a-r; a+r]$ si $\theta \geq \theta_0$; tandis que si $\theta < \theta_0$, $y_\theta(\rho)$ est supérieur à ρ si et seulement si ρ est dans l'intervalle $[\rho_1(\theta); \rho_2(\theta)]$:



Ces résultats peuvent, bien sûr, se retrouver par le calcul, la discussion portant sur le signe du trinôme $\rho^2 - 2a \cos \theta \cdot \rho + (a^2 - r^2)$ suivant les différentes valeurs de θ .

Étudions maintenant les variations de x_θ et de y_θ : ce sont les mêmes, sur D_θ , que celles de leurs carrés :

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(x_\theta^2) = \frac{\rho}{a^2 \sin^2 \theta} (\rho^2 - (a^2 + r^2 - 2a^2 \sin^2 \theta))$$

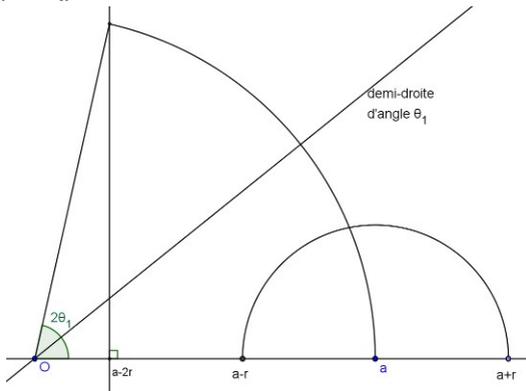
$$\frac{\partial}{\partial \rho}(y_\theta^2) = \frac{\rho}{a^2 \sin^2 \theta} (a^2 + r^2 - \rho^2)$$

- $\frac{\partial}{\partial \rho}(x_\theta^2)$ s'annule sur $[a - r ; a + r]$ à condition que l'on ait $(a - r)^2 \leq a^2 + r^2 - 2a^2 \sin^2 \theta \leq (a + r)^2$,

soit $\sin^2 \theta \leq \frac{r}{a}$, ce qui introduit le réel θ de $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ tel que $\sin^2 \theta_1 = \frac{r}{a}$.

Puisque $\left(\frac{r}{a}\right)^2 < \frac{r}{a}$, on aura $\theta_0 < \theta_1$.

La construction géométrique de θ_1 se fait à partir de la relation $\cos(2\theta_1) = 1 - 2\frac{r}{a} = \frac{a-2r}{a}$:



Pour θ inférieur à θ_0 , $D_\theta = [a - r, \rho_1(\theta)] \cup [\rho_2(\theta), a + r]$.

Montrons qu'alors $\frac{\partial}{\partial \rho}(x_\theta^2)$ est négatif sur $[a - r, \rho_1(\theta)]$ et positif sur $[\rho_2(\theta), a + r]$:

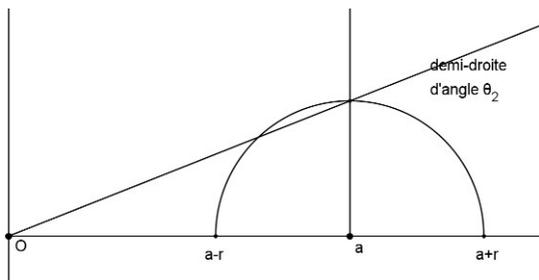
ρ_1 est la plus petite racine de l'équation $\rho^2 - 2a \cos \theta \cdot \rho + a^2 - r^2 = 0$,

donc $\rho_1 \leq a \cos \theta$, et aussi $\rho_1^2 = 2a \cos \theta \cdot \rho_1 - a^2 + r^2$. On en déduit que $\rho \leq \rho_1$.

$\rho^2 - (a^2 + r^2) + 2a^2 \sin^2 \theta \leq 2a^2 \cos^2 \theta - 2a^2 + 2a^2 \sin^2 \theta$, d'où la première partie de l'affirmation.

On démontrerait la seconde partie de la même façon.

- $\frac{\partial}{\partial \rho}(y_\theta^2)$ s'annule en $\rho = \sqrt{a^2 + r^2}$, qui appartient à D_θ pour $\theta \geq \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{r}{a}\right)$:

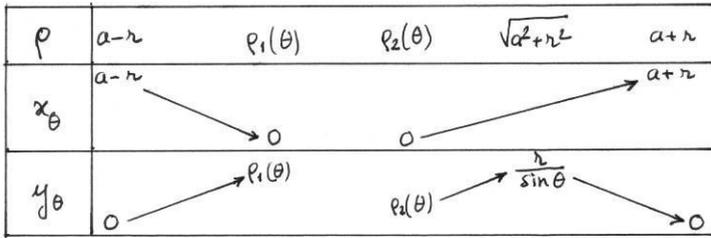


Les tableaux suivants récapitulent les variations conjointes de x_θ et y_θ suivant les différentes valeurs de θ :

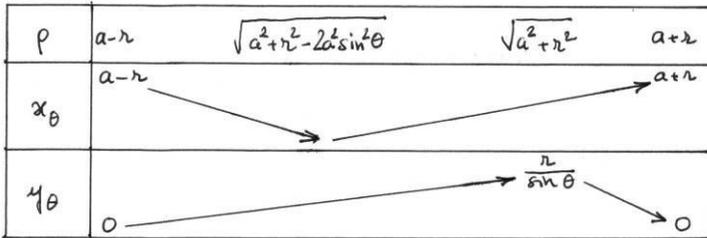
$\theta \in]0 ; \theta_2]$:

ρ	$a-r$	$\rho_1(\theta)$	$\rho_2(\theta)$	$a+r$
x_θ	$a-r$	○	○	$a+r$
y_θ	○	$\rho_1(\theta)$	$\rho_2(\theta)$	○

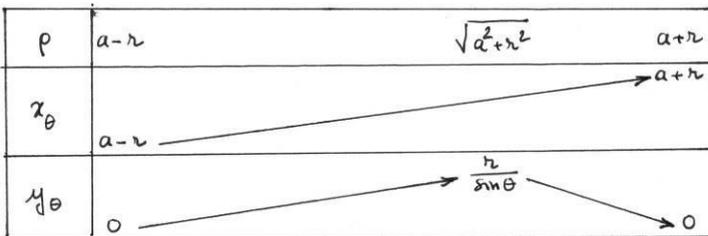
$\theta \in]\theta_2; \theta_0[:$



$\theta \in]\theta_0; \theta_1[:$



$\theta \in]\theta_1; \frac{\pi}{2}[:$



Enfin, c'est à partir de l'équation cartésienne $g(x,y)$ de Γ_θ où

$g(x,y) = (x^2 + y^2 + a^2 - r^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2 \cos^2 \theta)$ que l'on obtient plus facilement les renseignements sur les pentes des tangentes aux points remarquables.

g admet des dérivées partielles continues en tout point de Γ_θ et on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = 4x(a^2 + y^2 - a^2 - r^2) \text{ et } \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = 4y(a^2 + y^2 - a^2 - r^2 + 2a^2 \sin^2 \theta),$$

ce qui légitime les affirmations suivantes :

- Tangente parallèle à (O, e_2) :
 - en $M_\theta(a-r)$ et $M_\theta(a+r)$ pour tout θ de $]0, \frac{\pi}{2}[$;
 - en $M_\theta(\sqrt{a^2 + r^2 - 2a^2 \sin^2 \theta})$ pour tout θ de $]\theta_0, \theta_1[$.
- Tangente parallèle à (O, e_1) :
 - en $M\theta(\rho_1(\theta))$ et en $M\theta(\rho_2(\theta))$ pour tout θ de $]0, \theta_0[$;
 - en $M_\theta(\sqrt{a^2 + r^2})$ pour tout θ de $[\theta_2, \frac{\pi}{2}]$.

La figure de la page suivante représente :

$\Gamma_0, \Gamma_{\theta_2}, \Gamma_{\theta'}$ (pour une valeur de θ , dans $]\theta_2, \theta_0[$), $\Gamma_{\theta_0}, \Gamma_{\theta''}$ (pour une valeur de θ'' dans $]\theta_0, \theta_1[$), Γ_{θ_1} et $\Gamma_{\frac{\pi}{2}}$.

Les courbes ont été obtenues point par point en utilisant la construction géométrique mentionnée ci-dessus.

.../...

Figure (voir page précédente)

