

SITUATION-PROBLÈME : INTERSECTION D'UN CUBE ET D'UN PLAN

Par Jacques VERDIER
Lycée Arthur Varoquaux, Tomblaine

Voici un exemple de « SITUATION-PROBLÈME » proposée à des élèves de 1^{re} F début octobre.

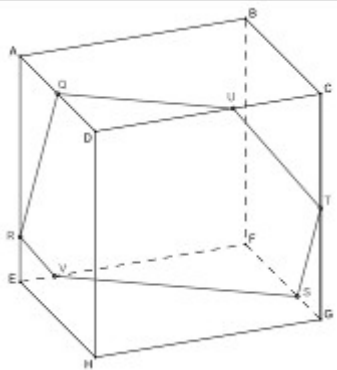
Puisque aucun de ces élèves n'avait, en seconde, abordé la géométrie dans l'espace, nous avons commencé l'année sur ce chapitre, travaillant avec les fiches de l'I.R.E.M. de LORRAINE ⁽¹⁾.

Fin septembre, tous les élèves avaient déjà réalisé au moins les fiches 1 à 13 et 15 à 17, plus quelques exercices (calculs d'aires ou de volumes par exemple) les complétant.

Nous avons, pour une séance prévue sur 3 heures (2 h. classe entière + 1 h. dédoublée), repris la fiche 8 pour chercher à résoudre le problème suivant ⁽²⁾ :

Connaissant le côté du cube (10 cm) et les mesures respectives de ER, QD et SG, soit 2, 5 et 3 cm, déterminer les dimensions de l'intersection (RQUTSV) et la tracer en vraie grandeur. Si le temps le permet, construire une maquette du cube coupé.

La figure en perspective cavalière est la suivante :



¹ Dessiner l'espace, 60 fiches pour les élèves de seconde, 1983.

² Je me permets de faire remarquer qu'une telle activité devrait avoir sa place en seconde : elle permettrait aux élèves de réinvestir toutes les connaissances qu'ils y auraient acquises (ou révisées), donc de renforcer ces acquis. Voir ci-dessous l'extrait du B.O. du 5/2/87 concernant le programme de géométrie de seconde :

L'objectif de cette partie d'une grande importance pour la formation de l'ensemble des élèves. Il s'agit d'analyser ou de réaliser des objets de l'espace physique, de les représenter par des figures planes, de reconnaître ou d'exploiter les configurations élémentaires intervenant dans ces problèmes et de calculer des distances, des aires, des volumes, ce qui permet à la fois d'investir la pratique de la géométrie plane dans des situations spatiales et de dégager quelques propriétés fondamentales de l'incidence, de l'orthogonalité et du repérage, qui sont spécifiques à l'espace. Dans une telle perspective, la géométrie dans l'espace utilisée durant toute l'année comme un terrain pour mobiliser des acquis en algèbre, en analyse et en géométrie plane.

Les élèves travaillaient en petits groupes de quatre. Dans chacun des groupes, un élève était plus particulièrement chargé de prendre en note la « démarche » (voir un exemple en annexe), afin qu'il en reste une trace écrite.

Ce que je voudrais montrer ici, c'est la très grande diversité des stratégies utilisées par les élèves pour résoudre le problème, et leur grande capacité à réutiliser des acquis antérieurs (qu'ils avaient bien mémorisés ou qu'ils retrouvaient grâce à leurs camarades ou à leur manuel) ou à trouver de nouveaux outils.

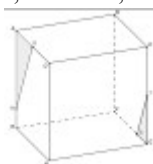
Seule une situation de travail autonome en petits groupes peut permettre au professeur d'observer ses élèves au travail : dans une situation « traditionnelle » (situation magistrale dite impositive, où l'information « descend » du professeur vers la classe, il est impossible – sauf si l'on a don d'ubiquité - d'observer le comportement de ceux-ci. Il faut aussi « oser » les laisser faire et ne pas induire leur démarche en leur donnant trop de pistes au départ, ni trop les presser par des contraintes de temps.

CALCUL DES COTÉS

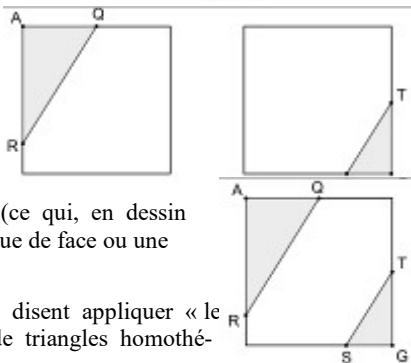
Spontanément, tous les élèves ont cherché à déterminer CU et CT, GT et GS, FS et FV etc. pour trouver UT, TS, SV etc. par Pythagore.

Les triangles semblables ont été facilement repérés :

- soit directement sur la figure en perspective, par exemple :



- soit en dessinant les faces parallèles côte à côte, en plan, par ex. :



- soit en "superposant" les faces parallèles (ce qui, en dessin technique, correspond à une vue de côté, une vue de face ou une vue de dessus), par ex. :

Noter que, au vu de ces figures, les élèves disent appliquer « le théorème de Thalès »³ ; d'autres parlent de triangles homothétiques.

Les côtés ont alors été, trouvés :

- soit en écrivant des rapports de côtés correspondants dans ces triangles, par ex. :

$$\frac{AQ}{AR} = \frac{GS}{GT}$$

- soit en utilisant comme intermédiaires les rapports trigonométriques dans ces triangles rectangles (voir aussi en annexe la reproduction du début du travail d'un des groupes), par exemple :

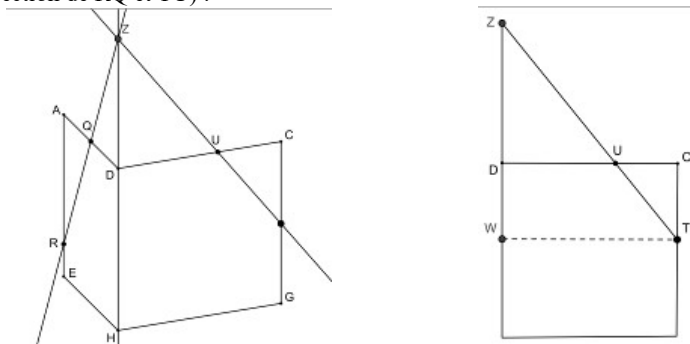
³ « Thalès » n'est pas une conséquence des calculs sur les vecteurs. C'est une « synthèse » - que le plus souvent l'élève se construit lui-même – des « bricolages » qu'il a pratiqué sur des figures (telles que celles rencontrées ici).

$$\tan \alpha = \frac{AQ}{AR} = \frac{5}{8}, \text{ d'où } \alpha \approx 32,005, \text{ puis } \tan \alpha = \frac{GS}{GT}, \text{ d'où } GT = \frac{GS}{\tan \alpha} = \dots \text{ etc.}$$

La difficulté rencontrée :

Elle a été de calculer CU et UD.

Il a fallu donner à beaucoup un « coup de pouce », en demandant aux élèves de retrouver comment ils avaient construit le point U (par prolongement de l'arête DH pour y porter Z, intersection de RQ et TU) :



Le calcul de DU et CU se fait alors à l'aide de la figure ci-dessus (où $CT = 5,2$ et $DZ = 8$). Là encore, les élèves appliquent ce qu'ils appellent « Thalès ».

A remarquer qu'aucun ne connaît la propriété suivante des proportions :

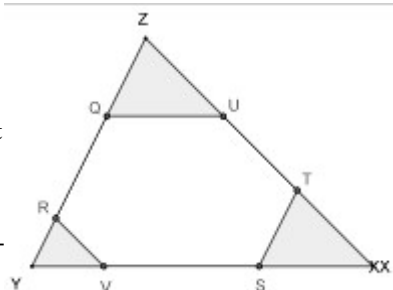
$$\frac{DU}{DZ} = \frac{CU}{CT} = \frac{DU}{DU + CT}.$$

CONSTRUCTION DE L'HEXAGONE

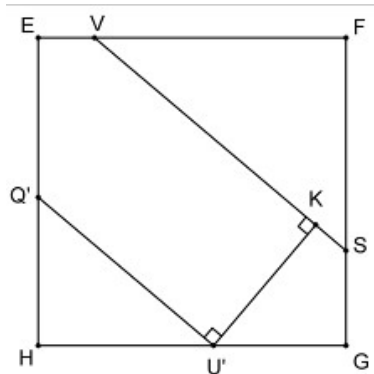
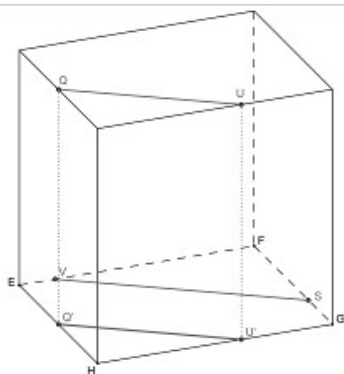
Arrive à ce stade du compte-rendu, je voudrais inviter le lecteur - s'il ne l'a déjà fait - à essayer de résoudre ce problème et à construire effectivement, sur du bristol, l'hexagone matérialisant l'intersection du cube et du plan, et à essayer d'imaginer quelles pourraient être (a priori) les stratégies développées par des élèves de première pour ce faire, et seulement après à poursuivre sa lecture.

..... PAUSE

- Deux groupes sur huit ont prolongé les segments UT, VS et RQ en dehors de la figure, construisant les points X (intersection de UT, VS et HG) et Y (intersection de QR, VS et EH) de la même façon qu'ils avaient obtenu Z. Par un calcul analogue à ceux faits dans la première partie (toujours "leur" Thalès, et Pythagore), ils ont déterminé ZQ, ZU, XT, XS, YR et YV (ce qui était relativement simple) et ont construit l'hexagone par « amputation des coins » du triangle ZYX.



- Six groupes sur huit (à l'instar de leur professeur !) n'ont pas du tout eu l'idée de sortir du cube, et ont cherché comment construire un hexagone en connaissant les longueurs de ses 6 côtés (et sachant en outre que ces côtés étaient parallèles deux à deux).
- Dans un de ces groupes, les élèves étaient persuadés que la « hauteur » de cet hexagone (distance des droites QU et VS) était égale à celle du cube, soit 10 cm. Un des élèves n'a d'ailleurs jamais voulu en démordre, même après avoir eu entre les mains la maquette du cube (que j'avais préalablement construite) et y avoir mesuré une hauteur de 11,2 cm.
- La plupart des groupes ont cherché par tous les moyens (!) à déterminer cette hauteur en se basant sur l'idée suivante : soit Q'U' la projection de QU sur le plan horizontal ; il suffit de déterminer la distance des deux droites VS et Q'U' dans le carré de base EFGH (voir figures ci-dessous). A ce niveau, un peu toutes les méthodes ont été utilisées, des plus simples aux plus « tarabiscotées ».



- Un autre groupe a cherché à déterminer les longueurs de toutes les diagonales de l'hexagone, pour tracer ensuite celui-ci au compas.
Pour les calculer, ils avaient fixé un repère dans l'espace, porté par (EH, EF, EA), et y ont déterminé les coordonnées des points Q, U, T etc.
Ce qui, avec $d(M, N) = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2}$ vu en classe la semaine précédente, leur a permis de tout trouver.
- Un dernier groupe, enfin, cherchant désespérément une méthode, repérant dans le manuel le chapitre « Relations métriques dans le plan : A. Le triangle ; B. Les polygones », y a trouvé le théorème : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ et l'a utilisé pour chercher, les angles des divers triangles (RQV, VQS, SQT et TQU), construisant ainsi l'hexagone, en commençant par son angle Q.
- J'ai pu remarquer, dans cette partie du travail, que les stratégies n'étaient pas très "fixées" : certains élèves essayaient de passer de l'une à l'autre dès qu'il y avait un point qui « leur résistait ».

LES APPRENTISSAGES RÉALISÉS

Une semaine après cette séquence, j'ai demandé aux élèves de me préciser par écrit ce qu'ils avaient appris de nouveau à l'occasion de la résolution de ce problème.

A part un groupe de quatre qui cite la relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A$, il est difficile de faire la part de ce qui a été véritablement découvert et de ce qui a été retrouvé ou « révisé » ; les formulations des élèves sont trop ambiguës.

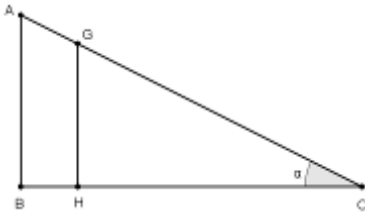
Ce oui est cité en premier par plus de la moitié de la classe est :

$$d(M, N) = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2}$$
 (dont sept élèves disent l'avoir « vu »

pour la première fois ; puis viennent les relations dans le triangle rectangle, et les triangles homothétiques (trois disent « hypothétiques ») ou « Thalès ». Deux élèves disent n'avoir rien appris, car ils savaient déjà tout.

Il faut cependant relativiser ces réponses : les élèves répondent plus en termes de « contenus » ou de propriétés qu'en termes de méthodes ou de démarches ; ils ont surtout appris, à mon avis, à utiliser leurs connaissances antérieures, à les réorganiser, à les « transférer ».

Je laisse pour la fin ce petit papier d'Eric qui a écrit ceci :



Jusque là, j'avais admis la relation

$$\frac{AB}{BC} = \frac{GH}{HC}.$$

Maintenant, j'ai compris pourquoi :

$$\frac{AB}{BC} = \tan \alpha \text{ et } \frac{GH}{HC} = \tan \alpha.$$

Annexe : reproduction du début du travail d'un des groupes

Demanche

- On regarde toute les données
- On en déduit $AR = 8$ $AQ = 5$ $SF = 7$.
- On calcule QR avec Pythagore.
 $QR = \sqrt{8^2 + 5^2} = 9,4340$
- Pour calculer ST, on projette la droite
RQ sur la face BC GF
par la direction (AB)
 $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha$
 $\beta = 57,3947^\circ$
 $ST = 5,6604$
 $(\cos \beta = \frac{SQ}{ST} \Rightarrow ST = \frac{SQ}{\cos \beta})$

$$TG = \tan \beta \times SG = 4,8000$$

